

**iccet**

INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA CONSTRUCCIÓN EDUARDO TORROJA  
Serrano Galvache, s/n - 28033 Madrid - Apartado 19002 - Teléf. 302 04 40  
ESPAÑA

## **INTRODUCCIÓN A LA FIABILIDAD ESTRUCTURAL Y ALGUNAS APLICACIONES**

**M.ª DEL SAGRARIO GÓMEZ LERA**  
Dr. Ingeniero Industrial

**ENRIQUE ALARCÓN ÁLVAREZ**  
Dr. Ingeniero de Caminos

Universidad Politécnica de Madrid.  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales  
Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales

**n. 408**

Madrid, abril 1992

CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

# ÍNDICE

|   | <u>Página</u> |
|---|---------------|
| CAPÍTULO 1.—LA SEGURIDAD EN LOS SISTEMAS ESTRUCTURALES .....  | 5             |
| 1.1. INTRODUCCIÓN .....   | 5             |
| 1.2. INCERTIDUMBRES .....   | 7             |
| 1.3. FIABILIDAD ESTRUCTURAL .....   | 8             |
| 1.4. MÉTODOS DE COMPROBACIÓN DE LA SEGURIDAD .....  | 12            |
| 1.5. REFERENCIAS .....  | 13            |
| <br>CAPÍTULO 2.—MÉTODOS DE NIVEL II .....   | <br>15        |
| 2.1. INTRODUCCIÓN .....   | 15            |
| 2.2. ÍNDICE DE FIABILIDAD .....   | 16            |
| 2.2.1. ÍNDICE DE FIABILIDAD DE CORNELL .....  | 19            |
| 2.2.2. ÍNDICE DE FIABILIDAD DE HASOFER Y LIND .....   | 24            |
| 2.3. MÉTODOS DE CÁLCULO DEL ÍNDICE DE FIABILIDAD .....  | 29            |
| 2.3.1. MÉTODO DE LOS MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN .....  | 29            |
| 2.3.1.1. FUNCIONES DE FALLO NO LINEALES, ESQUEMA ITERATIVO .....  | 30            |
| 2.3.1.2. VARIABLES CORRELACIONADAS .....  | 38            |
| 2.3.1.3. TRANSFORMACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS .....   | 42            |
| 2.3.2. MÉTODO DE LAS ESTIMACIONES PUNTUALES .....   | 44            |
| 2.4. REFERENCIAS .....  | 52            |
| <br>CAPÍTULO 3.—NORMAS BASADAS EN LOS CONCEPTOS DE FIABILIDAD ESTRUCTURAL ...                                 | <br>53        |
| 3.1. INTRODUCCIÓN .....   | 53            |
| 3.2. RELACIÓN ENTRE LOS MÉTODOS DE COMPROBACIÓN DE LA SEGURIDAD: NIVEL I Y NIVEL II .....                     | 55            |
| 3.2.1. OBTENCIÓN DE LOS COEFICIENTES DE PONDERACIÓN MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN ..... | 56            |
| 3.2.2. FORMATOS DE CÁLCULO EN VALORES MEDIOS Y VALORES CARACTERÍSTICOS .                                      | 60            |
| 3.3. APLICACIÓN A UN CASO PRÁCTICO .....  | 69            |
| 3.4. REFERENCIAS .....  | 75            |
| <br>CAPÍTULO 4.—ESTUDIO DE NIVELES DE SEGURIDAD EN TÚNELES .....  | <br>77        |
| 4.1. INTRODUCCIÓN .....   | 77            |
| 4.2. DESCRIPCIÓN FÍSICA DEL PROBLEMA .....  | 77            |
| 4.3. MODELO MATEMÁTICO DE CÁLCULO .....   | 80            |
| 4.4. ANÁLISIS DE LA SEGURIDAD .....   | 88            |
| 4.5. CARACTERIZACIÓN DE VARIABLES .....   | 97            |
| 4.6. REFERENCIAS .....  | 116           |

# CAPÍTULO 1

## LA SEGURIDAD EN LOS SISTEMAS ESTRUCTURALES

### 1.1. INTRODUCCIÓN

Las estructuras, al decir de la seguridad en los sistemas estructurales Eduardo Torroja, "no se construyen para que resistan. Se construyen con alguna otra finalidad o función ... ", Ref. (1.14). El principal objetivo del Proyecto en Ingeniería Estructural, se basa en que la estructura cumpla de forma satisfactoria la función para la que inicialmente fue concebida; el mantenimiento de esta función a lo largo de la vida útil de la misma, depende de múltiples factores o parámetros que tradicionalmente han sido considerados como cantidades deterministas. Sin embargo:

- a) Los parámetros implicados en el Proyecto son inciertos por lo que deberán tratarse en forma estadística como variables aleatorias; en este sentido, problemas tales como las combinaciones de carga no pueden formularse sin razonamientos que impliquen consideraciones probabilistas.
- b) La falta de información acerca del comportamiento estructural, combinada con la utilización de códigos que incorporan factores relativamente altos de seguridad, pueden llevar a la conclusión, aún mantenida por algunos ingenieros y público en general, de que la seguridad absoluta puede alcanzarse.

A pesar de las salvedades anteriores, una observación de los datos indicados en la Tabla 1.1, Ref. (1.2), permite afirmar que el riesgo de muerte por fallos estructurales es muy pequeño; siendo, por el contrario, su importancia relativa muy grande, lo que implica que los niveles aceptables de la probabilidad de fallo sean del orden de  $10^{-3}$  ó  $10^{-6}$ , para el caso de estructuras cuyo funcionamiento incorrecto trajese como consecuencia la pérdida de vidas humanas.

Hasta épocas relativamente recientes, el método utilizado para el establecimiento de la seguridad estructural ha sido el denominado en *TENSIONES ADMISIBLES*, y en él se supone a la estructura trabajando en régimen elástico, lo que permite determinar un valor máximo de la tensión  $\sigma_{mx}$ , que se compara con el obtenido al dividir una tensión típica del material (vg: la tensión del límite elástico) por un *COEFICIENTE DE SEGURIDAD*  $n$  establecido en base a la experiencia. La situación se complica cuando, por ejemplo, se trata con estructuras (hormigón, madera) en las que las hipótesis de comportamiento lineal no son válidas mas que para ciertos niveles de carga o bien cuando aparecen efectos especiales tales como abolladuras, alabeo de las secciones, etc.

La puesta a punto de los métodos de cálculo plástico de estructuras provocó, en los años 50, la reconsideración de los métodos de cálculo basados en el coeficiente de seguridad, y abrió el camino a la filosofía del cálculo en *ESTADOS LÍMITES*, que arranca del reconocimiento del carácter incierto de cargas y acciones y establece un número finito de modos de fallo o estados límites, entendidos como los márgenes dentro de los que se considera satisfactoria la respuesta de la estructura, y frente a los que se establecen los niveles de seguridad correspondientes.

Esta última filosofía, ha sido la adoptada por las Normas españolas de estructuras de acero y hormigón y es la base conceptual de los Eurocódigos que regularán las construcciones en los próximos años.

TABLA 1.1.

| EXPOSICION                             | RIESGO DE MUERTE POR HORA POR CADA 10 <sup>6</sup> PERSONAS EXPUESTAS | HORAS DE EXPOSICION POR PERSONA EXPUESTA Y POR AÑO | RIESGO DE MUERTE POR CADA 10 <sup>4</sup> PERSONAS EXPUESTAS POR AÑO |
|--|---|--|--|
| Alpinismo Internacional                | 2.700   | 100  | 27   |
| Pesca de arrastre (alta mar 1958-1972) | 59  | 2.900  | 17   |
| Transporte aereo (tripulaciones)       | 120   | 1.000  | 12   |
| Minería de Carbón                      | 21  | 1.600  | 3,3  |
| Desplazamientos en automovil           | 56  | 400  | 2,2  |
| Construcción                           | 7,7   | 2.200  | 1,7  |
| Transporte aéreo (pasajeros)           | 120   | 100  | 1,2  |
| Accidentes domesticos                  | 2,1   | 5.500  | 1,1  |
| Trabajo en Fábrica                     | 2   | 2.000  | 0,4  |
| Fuego en edificios                     | 0,15  | 5.500  | 0,08   |
| Fallo estructural                      | 0,002   | 5.500  | 0,001  |

Los fallos se relacionan con estados limites que pueden clasificarse en:

- Estados Límites Ultimos**, establecen condicionantes relativos al colapso total o parcial de la estructura, como:
  - rotura de secciones críticas
  - pandeo por inestabilidad elástica o plástica
  - pérdida global de equilibrio (vuelco, mecanismo, etc.).
- Estados Límites de Servicio**, relacionados con la funcionalidad de la estructura, entre ellos pueden citarse:
  - flechas
  - fisuración
  - vibración, etc.

En general se proyecta para el estado límite mas crítico y el resto se comprueba.

El Proyecto Estructural se realiza utilizando Normas o Códigos, que describen las mínimas consideraciones que deben tenerse en cuenta para el diseño, análisis y construcción de cada tipo estructural.

Hasta hace poco estos códigos podían considerarse como documentos en los que la practica cotidiana estaba codificada, garantizando estructuras del lado de la seguridad, aunque no siempre económicas. La seguridad se alcanzaba, en la mayoría de los casos, no por un conocimiento profundo de las acciones, materiales y respuesta del sistema, sino por la codificación de prácticas comprobadas.

En la actualidad, diferentes códigos están poniéndose al día incorporando conceptos probabilistas; así, por ejemplo el diseño denominado LRFD (Load and Resistance Factor Design) basado en conceptos probabilistas, ha sido propuesto tanto en Estados Unidos como en Europa.

En España esta línea se inició en los años 60 con las Normas relativas a estructuras de hormigón armado, siguiendo las de acero la misma filosofía.

La incorporación de estos nuevos conceptos a otras Normas industriales, es lenta debido fundamentalmente a:

- Problemas prácticos ocasionados por las numerosas restricciones existentes en el proyecto y por la complejidad inherente a la determinación de la respuesta del sistema.
- La falta de datos referentes a cargas, resistencia y otras variables implicadas en el proyecto.
- La incertidumbre en la cuantificación de los niveles de seguridad aceptados por la sociedad.
- La inercia al cambio de los profesionales en ingeniería.

La ventaja de la utilización de estos nuevos códigos descansa en la posibilidad de : incrementar la seguridad global para iguales costes de construcción o bien, que para idénticos o mas consistentes niveles de seguridad los costes sean mas bajos.

Las ventajas anteriores pueden conseguirse con una valoración racional de las diferentes fuentes de incertidumbre, asociadas a cada tipo estructural y con el estudio de las posibles interacciones entre las mismas.

## 1.2. INCERTIDUMBRES

Este apartado tiene por objeto comentar algunos de los tipos y fuentes de incertidumbres relativas a los parámetros ó *VARIABLES BASICAS* que rigen el comportamiento del sistema estructural.

Por lo general, todas las variables básicas utilizadas en ingeniería estructural tienen asociadas algún tipo de incertidumbre; hecho reconocido, implícitamente, en todos los códigos mediante el factor de seguridad; siendo inútil, por tanto, argumentar que los valores de todas las variables están acotados o pueden estarlo mediante controles adecuados , pudiendo utilizar estas cotas como valores base para el proyecto. En ingeniería estructural tales argumentos no son válidos:

- Los límites superiores de los valores de las cargas y los inferiores de la resistencia de los materiales no son fácilmente identificables.
- En el caso que tales cotas existiesen, su utilización como valores de cálculo podría ser irracional y conducir a la realización de proyectos antieconómicos.
- Los límites impuestos por los controles de calidad, verificaciones, etc., nunca pueden aceptarse como fiables al 100%; piénsese, por ejemplo, en el caso en el que las propiedades son evaluadas mediante rotura de probetas.

En el marco de la Teoría de la Fiabilidad Estructural, A.der Kiureghian, Ref. (1.12), establece los siguientes tipos de incertidumbres:

1. **Incetidumbres físicas:** Son consecuencia de la variabilidad inherente a las magnitudes físicas implicadas en el problema ( vg: dimensiones, propiedades, del material, cargas, resistencia, etc.).

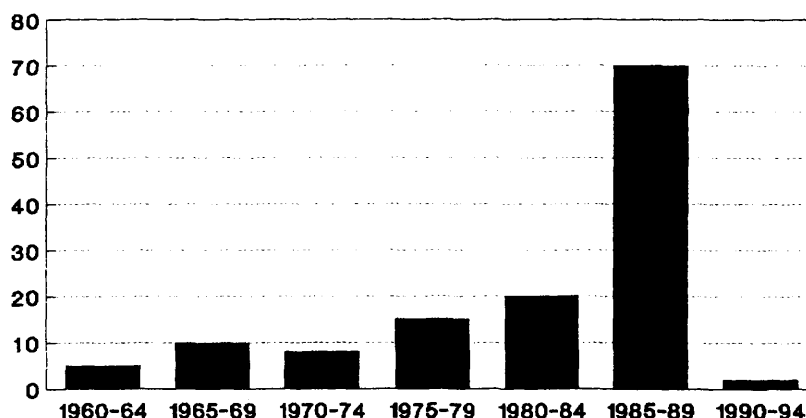
2. **Incertidumbres estadísticas:** Surgen de los modelos probabilistas utilizados para caracterizar a las Variables Básicas del problema, y son consecuencia de las aproximaciones que, debido a la falta de información, han de formularse para elegir las Funciones de Distribución y estimar los parámetros de las mismas.
3. **Incertidumbres del modelo:** Generadas como consecuencia de las hipótesis simplificativas (vg: homogeneidad; comportamiento elástico, elasto-plástico; pequeñas deformaciones; condiciones de contorno) realizadas en los modelos matemáticos utilizados para describir un fenómeno tan complejo como es la respuesta del sistema estructural.

Mientras que la variabilidad de los dos últimos tipos de incertidumbres puede reducirse, mediante el estudio y la investigación, las correspondientes al primer tipo son insoslayables.

### 1.3. FIABILIDAD ESTRUCTURAL

La Teoría de la Fiabilidad, aplicada inicialmente a procesos industriales de producción en serie, fue adaptada en 1960 al campo de la Ingeniería Estructural con objeto de elaborar métodos que permitiesen determinar los niveles de seguridad de los Sistemas Estructurales, en base a un tratamiento racional de las incertidumbres existentes en los mismos. Momento a partir del cual este área de investigación ha experimentado un fuerte impulso, Tabla 1.2, y las bases teóricas desarrolladas han pasado de ser un tema de investigación académica a un conjunto de metodologías con un amplio rango de aplicación práctica.

TABLA 1.2.  
*FIABILIDAD ESTRUCTURAL*  
*Número de artículos*



El problema de la determinación de la Fiabilidad de un sistema estructural implica, la consideración de todas las Variables,  $x_i$ , que controlan la respuesta del sistema; y se formula en base a Estados Límites, que pueden definirse mediante funciones del tipo:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (1.1)$$

que establecen, sobre el dominio de definición de las variables básicas, la frontera que separa la Región de Seguridad,  $[g(x_i) > 0]$  de la de fallo,  $[g(x_i) < 0]$ , Figura 1.1.

La superficie definida por la ecuación (1.1), recibe el nombre de, "Función de Fallo",  $F_f$ , y se considera comprendida en la región de fallo.

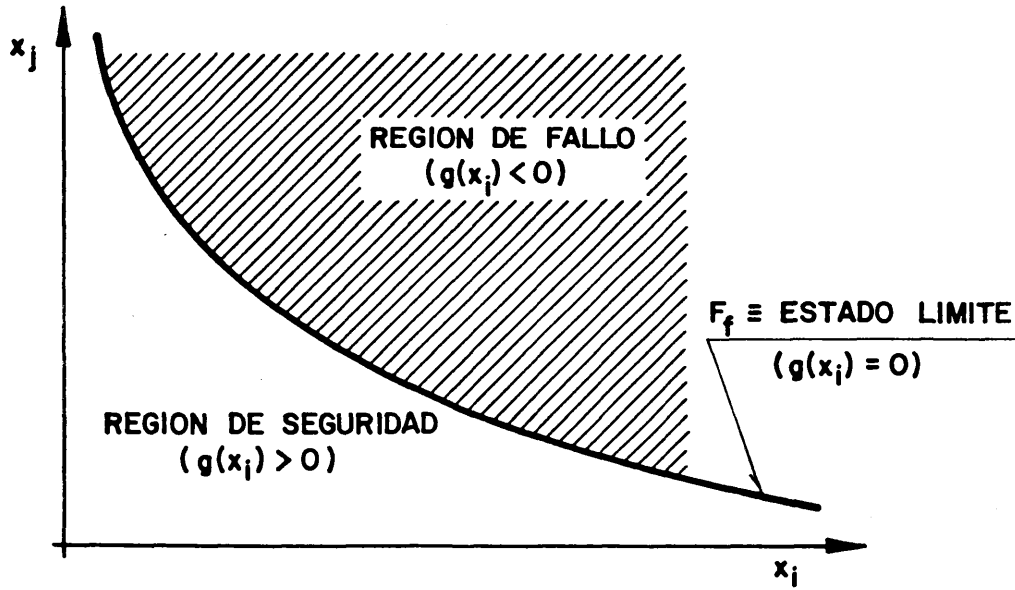


Figura 1.1

En el caso en que  $x_i$  sean variables aleatorias continuas y designado por  $f_x(x_i)$  a la Función de Densidad conjunta de las mismas; la Probabilidad de Fallo será:

$$P_f = \int \dots \int_{g(x) \leq 0} f_x(x_i) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (1.2)$$

definiendose la Fiabilidad,  $\mathcal{R}$ , del sistema como:

$$\mathcal{R} = 1 - P_f \quad (1.3)$$

El caso mas sencillo se obtiene al considerar solamente dos variables básicas. Supóngase una estructura en la que la resistencia pueda definirse mediante una variable,  $R$ , y el efecto de todas las cargas mediante otra designada por,  $S$ .

El fallo se producirá cuando:

$$S \geq R$$

y la probabilidad de que esto ocurra, podrá plantearse mediante alguna de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} P_f &= \text{Prob} (R \leq S) \\ &= \text{Prob} (R - S \leq 0) \\ &= \text{Prob} (R/S \leq 1) \end{aligned} \quad (1.4)$$

En el supuesto en el que  $R$  y  $S$  sean Variables Aleatorias continuas; teniendo en cuenta la expresión (1.1) y designando por  $f_{RS}(r,s)$ , Figura 1.2, a la función de densidad conjunta de las dos variables, puede escribirse:

$$\begin{aligned} P_f &= \text{Prob} (R \leq S) \\ &= \int \int_{S \geq R} f_{RS} dr ds \end{aligned} \quad (1.5)$$

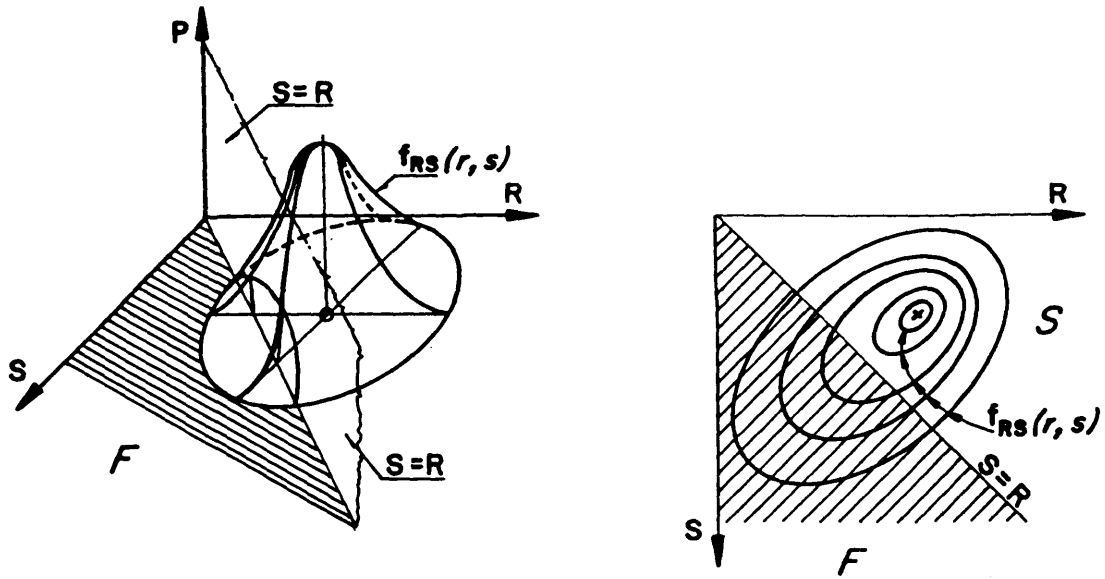


Figura 1.2

E integrando respecto a S, Figura 1.3, se obtiene:

$$P_f = \int_0^{\infty} ds \int_0^s f_{RS}(r, s) dr \quad (1.6)$$

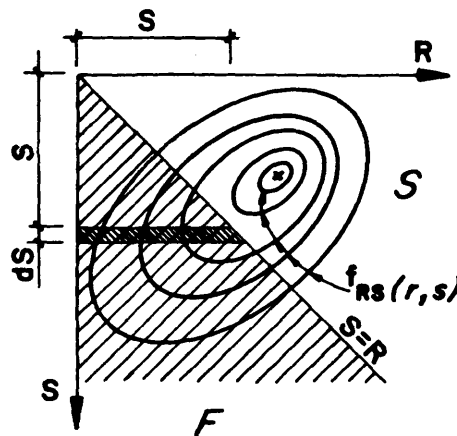


Figura 1.3

es decir, la Probabilidad de Fallo corresponde al Volumen de la función de densidad,  $f_{RS}(r, s)$ , comprendido en la zona de fallo; separada, en este caso, de la región segura por la función:

$$F_f \equiv R - S = 0$$

bisectriz del plano R-S, Figura -1.2.

Si las variables aleatorias son independientes, la función de densidad conjunta será:

$$f_{RS}(r, s) = f_R(r) \cdot f_S(s) \quad (1.7)$$



por lo que la expresión (1.6) toma la forma:

$$P_f = \int_0^{\infty} f_S(s) \left[ \int_0^s f_R(r) dr \right] ds \quad (1.8)$$

y teniendo en cuenta que la Función de Distribución marginal de la variables aleatoria R es:

$$F_R(s) = \text{Prob}(R < S) = \int_0^s f_R(r) dr \quad (1.9)$$

la ecuación (1.8) puede escribirse como sigue:

$$P_f = \int_0^{\infty} F_R(s) \cdot f_S \cdot ds \quad (1.10)$$

en otras palabras, Figura -1.4, la Probabilidad de Fallo es igual a la probabilidad de que  $R < x$ , cuando  $x < S < x + dx$ ; recuérdese que:

$$dF_S(x) = f_S(x) dx = \text{Prob}(x < S < x + dx) \quad (1.11)$$

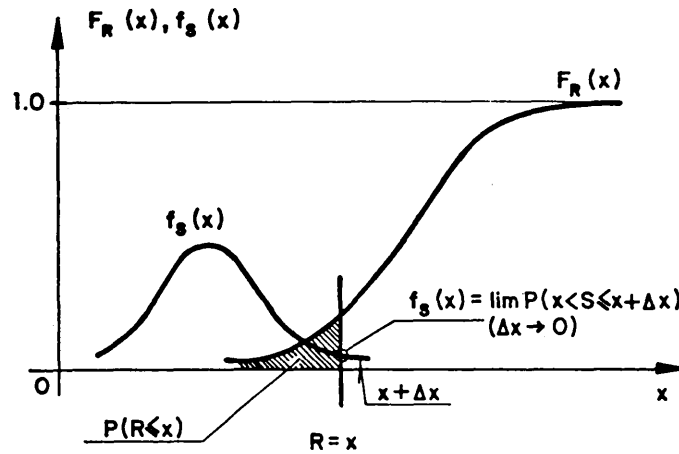


Figura 1.4

Otra forma de expresar la Probabilidad de Fallo es a través de la expresión:

$$P_f = \int_0^{\infty} [1 - F_S(x)] f_R dx \quad (1.12)$$

que representa la probabilidad de que  $S > x$ , estando R comprendida entre x y  $x + dx$ ; ya que:

$$dF_R(x) = f_R(x) dx = \text{Prob}(x < R < x + dx)$$

y

$$1 - F_S(x) = 1 - \text{Prob}(S < x) = \text{Prob}(S > x)$$

1.4. MÉTODOS DE COMPROBACION DE LA SEGURIDAD

Dependiendo del grado de información de que se dispusiese, acerca del problema estructural; el JCSS (Joint Committe on Structural Safety : CEB-CECM-CIB-FIP-IABSE-IASS-RILEM), Ref. (1.4), 1975; agrupó los métodos de verificación de la seguridad en los siguientes niveles:

TABLA 1.3

| JERARQUIA DE LOS METODOS DE FIABILIDAD ESTRUCTURAL |   |   |  |  |  |
|--|---|---|--|--|--|
| NIVEL  | PROCEDI-<br>MIENTO DE<br>CALCULO                        | DISTRIBU-<br>CIONES DE<br>PROBABI-<br>LIDAD | FUNCIONES<br>DE FALLO                      | CONSIDERA-<br>CION DE<br>INCERTIDUM-<br>BRES | RESULTADO                                |
| 1<br>Norma y<br>Codigos                            | Calibración<br>mediante<br>metodos de<br>Nivel II y III | No se<br>consideran                         | En general<br>lineales                     | Determinista<br>(valores<br>carácterísticos) | Factores de<br>seguridad<br>parciales    |
| 2  | Métodos de<br>Nivel II                                  | Distribuciones<br>nomnales o<br>asimilables | Lineales o<br>aproximadas<br>como lineales | Momentos de 2º<br>Orden                      | Probabilidad de<br>Fallo                 |
| 3<br>Métodos exáctos                               | Algoritmos de<br>transformación                         | Cálculo de la<br>Normal<br>equivalente      | Lineales o<br>aproximadas<br>como lineales | Variables<br>aleatorias                      | Probabilidad de<br>Fallo                 |
|  | Método de<br>integración<br>numérica y<br>simulación    | Tipo Arbitrario                             | Tipo Arbitrario                            |  |  |
| 4<br>Métodos de<br>decisión                        | Cualquiera de las anteriores + Coste Generalizado       |   |  |  | Optimización de<br>Coste<br>Generalizado |

Nivel I

Con una base semiprobabilista, utilizan Factores Parciales de ponderacion de las cargas,  $\gamma_s$  , y resistencia,  $\gamma_R$  , relacionados con los valores característicos predefinidos ó valores nominales, se incluye en este nivel el tradicional formato en Tensiones Admisibles.

Este tipo de procedimientos fue inicialmente designado como formato en Estados límites; sin embargo, es preferible este término para designar los límites de separación entre el fallo y la seguridad.

Nivel II

Métodos que utilizan procedimientos aproximados para obtener valores numéricos de la probabilidad de fallo.

Frecuentemente están asociados con una representación simplificada de las Distribuciones de Probabilidad, ya que solamente utilizan para definir las hasta los momentos de 2º orden e inferiores: valor medio, desviación típica y covarianza, con objeto de caracterizar la correlación entre las distintas variables.

### Nivel III

Implican una descripción probabilista completa de la Función de Distribución conjunta de las variables básicas que afectan a la respuesta de la estructura.

### Nivel IV

Métodos que evalúan la probabilidad de fallo con objeto de minimizar el coste generalizado de la estructura: construcción + mantenimiento + reparación, en caso de fallo. Este tipo de procedimientos son apropiados para sistemas estructurales (vg: puentes de autopista, etc.) en los que las pérdidas de económicas producidas, en el caso de funcionamiento incorrecto de la estructura, sean mucho mayores que las expectativas de pérdidas de vidas humanas, o factores tales como los ecológicos o culturales.

Aunque los cuatro niveles representan una jerarquización de los procedimientos existentes para evaluar la seguridad; la clasificación no es, en modo alguno, exhaustiva, es el caso de procedimientos que utilizando mas información de la requerida en los métodos de Nivel II, no disponen de datos suficientes como para poder evaluar la distribución de probabilidad conjunta tal y como demandan los de Nivel III. La Tabla - 1.3, Ref (1.11), presenta una síntesis de los citados métodos.

## 1.5.- REFERENCIAS

- (1.1) D.I.BLOCKLEY. "Reliability or Responsibility ?". Structural Safety, Vol 2, No.4, pp. 273-280. Junio 1985.
- (1.2) CIRIA (Construction Industry Research and Information Association). "Rationalisation of Safety and Serviceability Factors in Structural Codes". CIRIA Report No. 63. Londres. 1977.
- (1.3) T.V.GALAMBOS. "Developments in Modern Steel Design Standars" J. Construct. Steel Research 17, Ed.Elsevier, pp. 141-162. 1991.
- (1.4) JCSS (Joint Committe on Structural Safety: CEB-CECN-CIB-FIP-IABSE-RILEM). " First Order Reliability Concepts for Design Codes". CEB Bulletin No.112. July 1976.
- (1.5) JCSS (Joint Committe on Structural Safety: CEB-CECM-CIB-FIP-IABSE-IASS-RILEM). "International System of Unifed Standard Codes for Structures". Vol 1 : Common Unufied Rules for Different Types of Construction and Material. CEB/FIP 1978.
- (1.6) JCSS (Joint Committe on Structural Safety: CEB-CECM-CIB-FIP-IABSE-IASS-RILEM). "general Principles on Reliability for Structural Design". IABSE 1981.
- (1.7) JCSS (Joint Committe on Structural Safety: CEB-CECM-CIB-FIP-IABSE-IASS-RILEM). "Proposal for a Code for the use of Reliability Methods in Structural Design". O. Ditlevsen, H.O. Madsen. 1989.
- (1.8) H.O.MADSEN, S.KRENK & N.C.LIND. "Methods of Structural Safety". Ed. Prentice Hall. 1986.
- (1.9) W.MANNERS. "Classification and Analysis of Uncertainty in Structural Systems". Reliability and Optimization of Structural Systems'90. Proceedings of the 3rd IFIP WG 7.5 Conference. Berkeley.USA. Ed. Sproger-Verlag, pp. 251-260.1990.
- (1.10) A.L.MARSHALL. "Marine Concrete". Ed. van Nostran Reinhold. Nueva York. 1990.
- (1.11) R.E.MELCHERS. "Structural Reliability : Analysis and Prediction". Ed. Ellis Horwood. 1987.
- (1.12) A. DER KIUREGHIAN. "Measures of Structural Safety Under Imperfect States of Knowledge". ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 115, nº 5, May, pp.1119-1140. 1989.
- (1.13) P. THOFT-CHRISTENSEN & M.J.BAKER. "Structural Reliability Theory and Its Applications". Ed. Springer-Verlag. 1982.
- (1.14) E. TORROJA. "Razón y Ser de los Tipos Estructurales". Ed. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid. 1984

## CAPÍTULO 2

### MÉTODOS DE NIVEL II

#### 2.1. INTRODUCCIÓN

La determinación de la Probabilidad de Fallo, mediante las ecuaciones (1.2), (1.10) ó (1.12), presenta serios problemas ya que por lo general no existen suficientes datos para definir la función de densidad conjunta de las variables que caracterizan al sistema; por otra parte, aún disponiendo de la información necesaria, resulta prácticamente imposible encontrar una solución analítica a la integral multi-dimensional que define  $P_f$ ; debiendo recurrir, en el mejor de los casos, a métodos numéricos para la evaluación de la misma.

Contra las reticencias previas bien podría argumentarse que el método más general, y probablemente el más sencillo, que podría utilizarse para resolver el problema sería el Método de Montecarlo, que permite evaluar  $P_f$  en base a la generación de muestras aleatorias simples para las variables básicas. Este procedimiento es, sin embargo, totalmente ineficaz para sistemas cuya probabilidad de fallo es muy pequeña, debido al gran número de simulaciones que han de realizarse para obtener un valor razonablemente preciso de la probabilidad de fallo. Por ejemplo, en la Ref. (2.3), se propone que una primera estimación del número  $N$  de muestras que han de generarse para obtener una probabilidad de fallo,  $P_f$ , con un nivel de confianza  $C$ , puede obtenerse de la expresión:

$$N > \frac{-\ln(1 - C)}{P_f}$$

lo que implica que para conseguir un valor  $P_f = 10^{-3}$ , con un nivel de confianza del 95%, el número de muestras que han de tomarse para cada variable básica ha de ser como mínimo 3000.

Con objeto de soslayar las dificultades anteriores, los Métodos de Nivel II, se presentan como una alternativa eficaz, ya que para caracterizar a las variables básicas,  $x_i$ , solamente utilizan los momentos de segundo orden e inferiores

— Valor Medio:

$$\mu_i = E[x_i]; i = 1, \dots, n$$

— Covarianza:

$$\text{COV}(x_i, x_j); i = 1, \dots, n$$

Recuérdese que:

$$\sigma_i^2 = \text{COV}(x_i, x_j)$$

lo que representa, para distribuciones de probabilidad definidas por dos parámetros (vg: Distribución Normal:  $N(\mu, \sigma)$ ), una descripción completa de la variable básica.

Entre los diferentes métodos a los que se ha hecho mención en el apartado 1.4; los Métodos de Nivel II, debido a su simplicidad, gozan en este momento de una gran popularidad provocada por la profusa utilización de los mismos en la elaboración de Códigos de Proyecto.

## 2.2. INDICE DE FIABILIDAD

Los Métodos de Nivel II, al igual que otros procedimientos que evalúan la Fiabilidad Estructural, tratan de predecir la probabilidad del incumplimiento de los Estados Límites de un Sistema Estructural, por lo que dependerán de las Variables Básicas (VB) que controlan la respuesta del mismo, pudiendo definirse, tal y como se indicó en el apartado 1.3, mediante funciones del tipo:

$$g(\underline{x}) = g(x_1, \dots, x_n)$$

La consideración de las VB como variables aleatorias implica que la variable  $M$  definida en la forma:

$$M = g(\underline{X})$$

y designada como Margen de Seguridad, es una variable aleatoria caracterizada mediante su correspondiente función de densidad,  $f_m(m)$ .

La Probabilidad de Fallo,  $P_f$ , podrá expresarse en la forma

$$P_f = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm = \text{Prob}(M \leq 0)$$

(2.1)

cuya representación gráfica corresponde al área sombreada en la Figura 2.1.

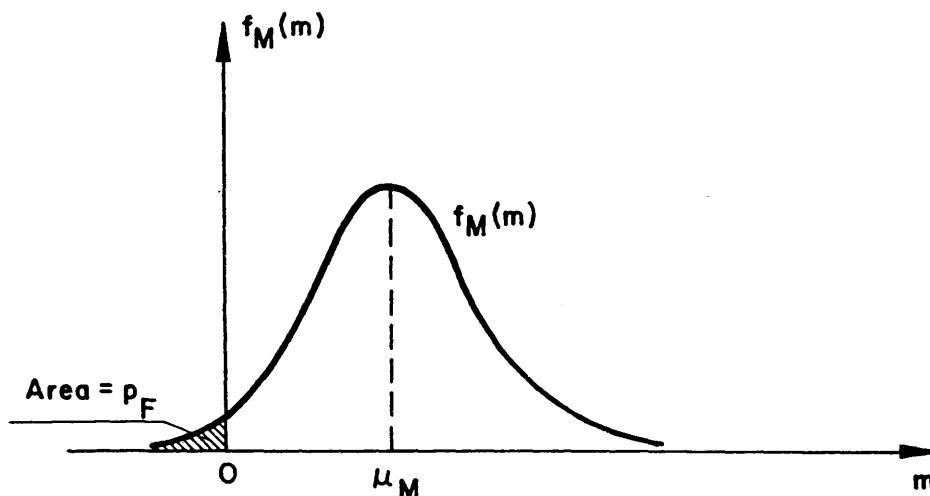


Figura 2.1

## EJEMPLO 2.1

La carga aplicada a una barra de un sistema estructural induce en la misma una tensión cuya función de densidad se indica en la Figura E1. Suponiendo que la función de densidad de la tensión límite del material corresponde a la indicada en la Figura E2. Calcular la Probabilidad de Fallo y la Fiabilidad de la citada barra.

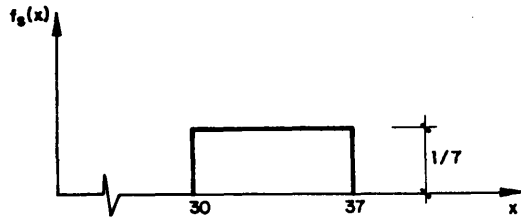


FIGURA - E1

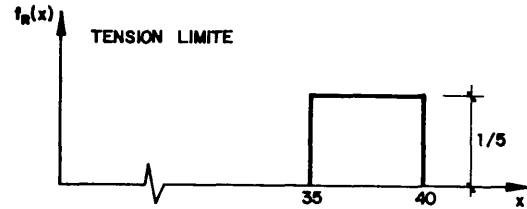


FIGURA - E2

De los datos aportados y de la definición de Función de Distribución se deduce que las correspondientes al efecto de la carga,  $F_S(x)$ , y a la resistencia,  $F_R(x)$ , son:

$$* \quad F_S(x) = \int_0^{\infty} f_S(x) dx = \begin{cases} 0 & ; x < 30 \\ \frac{x-30}{7} & ; 30 \leq x \leq 37 \\ 1 & ; x \geq 37 \end{cases}$$

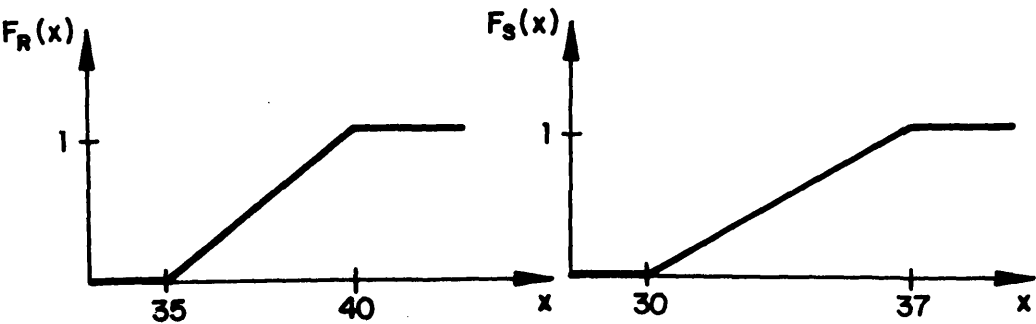
$$* \quad F_R(\eta) = \int_0^{\infty} f_R(\eta) d\eta = \begin{cases} 0 & ; x < 35 \\ \frac{x-35}{5} & ; 35 \leq x \leq 40 \\ 1 & ; x > 40 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la definición de Probabilidad de Fallo dada por la ecuación (1.12), puede escribirse :

$$\begin{aligned} P_f &= \int_0^{\infty} [1 - F_S(x)] f_R(x) dx \\ &= \int_{35}^{37} \left[1 - \frac{x-30}{7}\right] \frac{dx}{5} = 0.057 = 5.7\% \end{aligned}$$

siendo la Fiabilidad de la barra, ecuación (1.3),

FIABILIDAD=  $\mathfrak{R} = 1 - P_f = 0.943 = 94.3\%$



Aún considerando solamente dos Variables Básicas, casos tan sencillos como el presentado en el ejemplo anterior son poco frecuentes en la práctica.

En su planteamiento inicial, los Métodos de Nivel II, tratan de encontrar una Medida de la Seguridad, directamente relacionada con la Probabilidad de Fallo; y que, sin embargo, no implique, necesariamente, la determinación de la misma mediante la integración de la Función de Densidad conjunta de las VB. En la terminología usual, esta medida de la seguridad se denomina Índice de Fiabilidad,  $\beta$ .

A título orientativo, y para distintos sistemas estructurales, Ref. (2.10), en la Tabla - 2.1 se indican valores habituales del Índice de Fiabilidad y en la Figura-I, la relación de  $\beta$  con la Probabilidad de Fallo.

TABLA 2.1

| Estructura                         | Safety Index $\beta$ |
|------------------------------------|----------------------|
| Destructores C1901                 | 2.0                  |
| Fragatas inglesas                  | 2.2                  |
| Plataformas petrolíferas metálicas | 2.3                  |
| Edificios norteamericanos          | 3.0                  |
| Columnas tabulares y vigas columna | 3.3                  |
| Plataformas offshore inglesas      | 3.7                  |
| Puentes de acero alemanes          | 3.7                  |
| Puentes de acero ingleses          | 4.8                  |
| Plataformas ancladas al fondo      | 5.3                  |
| Buques mercantes                   | 5.3                  |

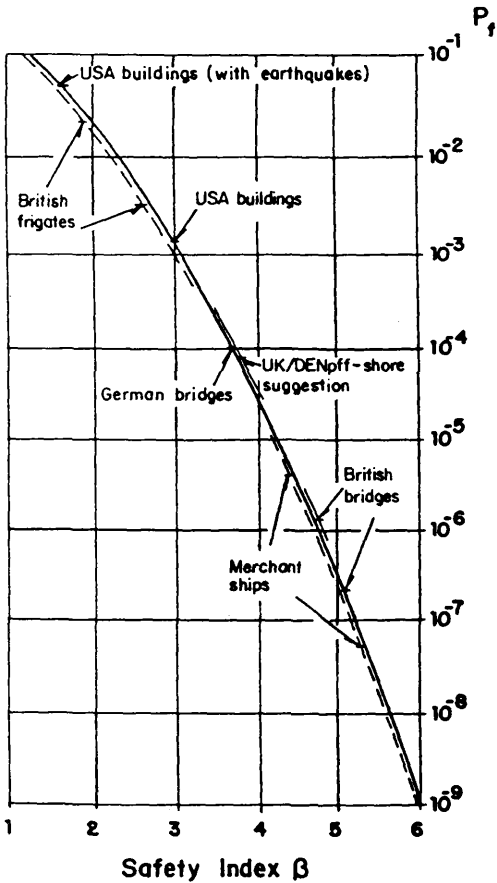


Figura I

### 2.2.1.- INDICE DE FIABILIDAD DE CORNELL

CORNELL (1969), Ref. (2.4), definió el INDICE DE FIABILIDAD,  $\beta$ , en la forma:

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} \quad (2.2)$$

La representación de esta definición, puede observarse en la Figura - 2.2

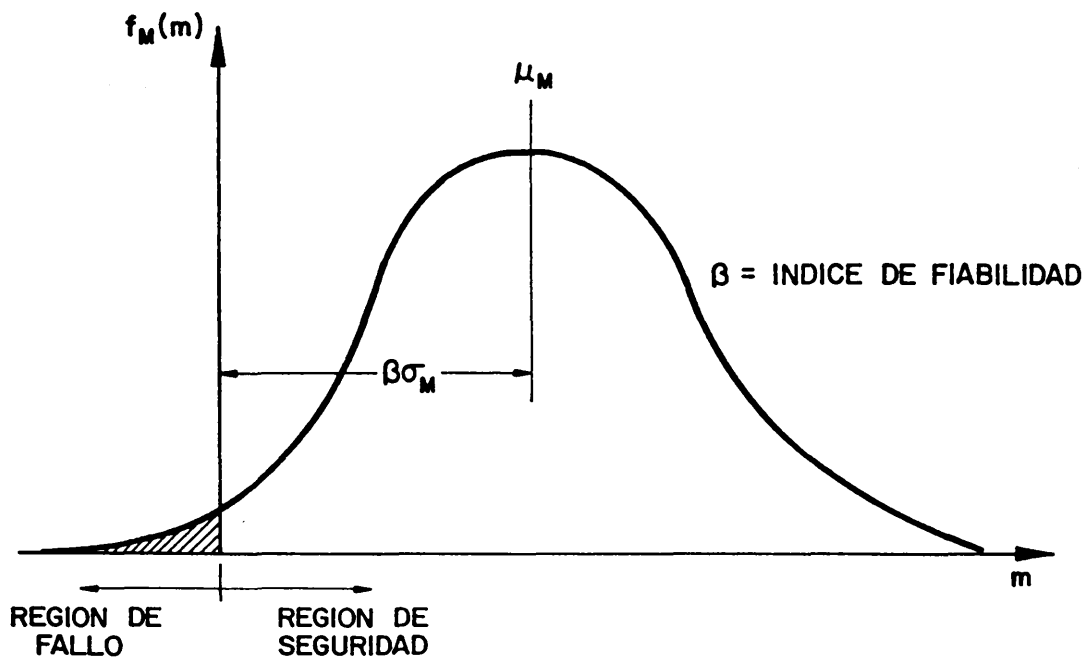


FIGURA - 2.2

Es decir, el Índice de Fiabilidad,  $\beta$ , representa el número de desviaciones típicas,  $\sigma_M$ , que separan al valor medio del origen; lo que proporciona una medida de la fiabilidad del sistema, ya que cuanto mas separado esté  $\mu_M$  del origen ( $\beta$  mayor) menor será la probabilidad de fallo del sistema (zona sombreada de la figura).

Para el caso en el que  $X = (R, S)$ , siendo  $R$  la resistencia del sistema y  $S$  el efecto que, sobre el mismo, provocan las cargas; el Estado Límite vendría caracterizado por:

$$g(X) = R - S = 0 \quad (2.3)$$

siendo el margen de seguridad:

$$M = R - S \quad (2.4)$$



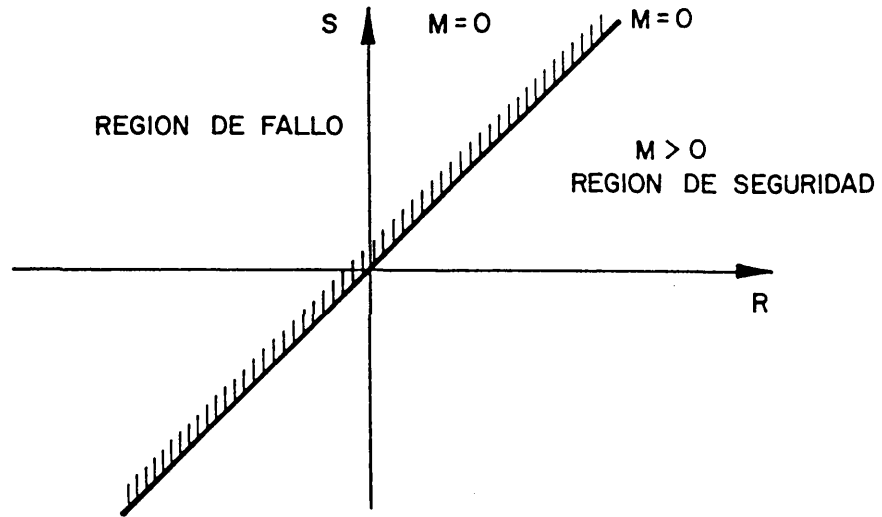


Figura 2.3

y la Probabilidad de Fallo

$$P_f = \text{Prob} (R - S \leq 0) = \text{Prob} (M \leq 0) \quad (2.5)$$

Si R y S son Variables aleatorias independientes con distribuciones de probabilidad Normales; es decir, si

$$R: N(\mu_R, \sigma_R) \quad (2.6)$$

$$S: N(\mu_S, \sigma_S)$$

entonces, M, será una variable aleatoria con distribución de probabilidad:  $N(\mu_M, \sigma_M)$ , y como:

$$\begin{aligned} \mu_M &= \mu_R - \mu_S \\ \sigma_M^2 &= \sigma_R^2 - \sigma_S^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

teniendo en cuenta (2.6) y (2.7), puede escribirse:

$$P_f = \Phi \left( \frac{0 - \mu_M}{\sigma_M} \right)$$

es decir:

$$P_f = \Phi \left[ \frac{-(\mu_R - \mu_S)}{(\sigma_R^2 - \sigma_S^2)^{1/2}} \right] = \Phi(-\beta) \quad (2.8)$$

siendo,  $\phi$ , la Función de Distribución de la  $N(0, 1)$ ; por lo que el Índice de Fiabilidad,  $\beta$ , puede obtenerse mediante las tablas de la citada distribución de probabilidad. Así, por ejemplo, un Índice de Fiabilidad,  $\beta = 3$  corresponde a una Probabilidad de Fallo del 0.1349%.

Si el número de VB implicadas en la resolución del problema es  $n$ , y la Función de Fallo puede representarse mediante un hiperplano

$$g(\underline{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i = a_0 + \underline{a}^T \cdot \underline{X} \quad (2.9)$$

donde  $\underline{X}$  es un vector columna formado por las VB y  $\underline{a}^T$  son los valores conocidos  $a_i$ ; el Margen de Seguridad correspondiente a la Función de fallo será:

$$M = a_0 + \underline{a}^T \cdot \underline{X} \quad (2.10)$$

y el Índice de Fiabilidad, (2.2),

$$\beta = \frac{a_0 + \underline{a}^T \cdot E[\underline{x}]}{\sqrt{\underline{a}^T \cdot \underline{C}_x \cdot \underline{a}}} \quad (2.11)$$

siendo  $E[\underline{X}]$ , el vector de valores medios y  $\underline{C}_x$ , la matriz de covarianza de  $\underline{X}$ , es decir:

$$E[\underline{x}] = \begin{bmatrix} \mu_{x1} \\ \mu_{x2} \\ \vdots \\ \mu_{xm} \end{bmatrix}; \quad \underline{C}_x = \begin{bmatrix} VAR(x_1) & COV(x_1, x_2) & \dots & COV(x_1, x_n) \\ COV(x_2, x_1) & VAR(x_2) & \dots & COV(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ COV(x_n, x_1) & COV(x_n, x_2) & \dots & Var(x_n) \end{bmatrix}$$

Volviendo al caso de dos Variables Aleatorias, R y S, la Figura - 2.4 indica, para distintos coeficientes de variación,

$$\left( V_R = \frac{\mu_R}{\sigma_S}, V_S = \frac{\mu_S}{\sigma_S} \right)$$

la relación entre  $\beta$  y  $P_f$  con el Coeficiente de Seguridad Central,  $C_o$ , definido en la forma

$$C_o = \frac{\mu_R}{\mu_S} \quad (2.13)$$

La relación entre  $\beta$  y  $C_o$  puede obtenerse de forma sencilla teniendo en cuenta la definición del Índice de Fiabilidad, proporcionada por Cornell, (2.2),

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_R - \mu_S}{(\sigma_S^2 + \sigma_R^2)^{1/2}} = \frac{\mu_R - \mu_S}{(V_S^2 \mu_S^2 + V_R^2 \mu_R^2)^{1/2}} \quad (2.14)$$

y dividiendo por  $\mu_s$ , se obtiene finalmente

$$\beta = \frac{C_o - 1}{(V_S^2 + V_R^2 C_o^2)^{1/2}} \quad (2.15)$$

o bien

$$C_o = \frac{1 + \beta [V_R^2 + V_S^2 - \beta^2 V_R^2 V_S^2]^{1/2}}{1 - \beta^2 V_R^2} \quad (2.16)$$

tanto la expresión anterior como la Figura -2.4 indican que el Coeficiente de Seguridad Central, depende de las incertidumbres asociadas a R y S; es decir, a medida que aumentan  $V_R$  y  $V_S$ , mayor es el valor de  $C_o$  que ha de considerarse para obtener la misma Probabilidad de Fallo. Lo que pone de manifiesto las deficiencias de las medidas deterministas a la hora de establecer Márgenes de Seguridad.

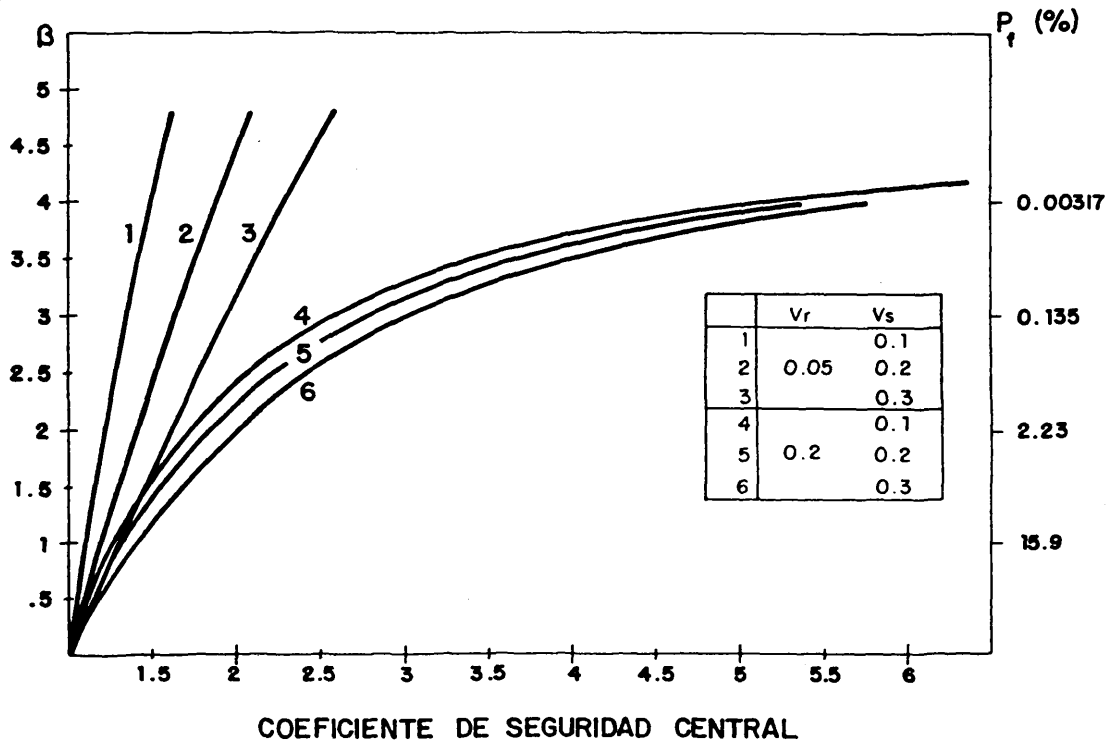


Figura 2.4

## EJEMPLO 2.2

Suponiendo que el momento flector producido por la carga en una viga,  $M_c$ , tiene una distribución Normal con parámetros

$$\mu_{M_c} = 23.1 \text{ Nxm}; \sigma_{M_c} = 3.6 \text{ Nxm}$$

- Considerando que la viga ha sido proyectada de forma que el Factor de Seguridad, que relaciona el momento provocado por la carga y la capacidad a flexión de la misma,  $M_f$ , sea igual a 1.5 y que el coeficiente de variación de  $M_f$ , es del 15% . Calcular la Probabilidad de Fallo, si esta se produce cuando  $M_c$  supera a  $M_f$ .
- Si se desea una probabilidad de fallo  $\leq 0.5\%$  , ¿ cuál es el valor medio de la capacidad a flexión?. Suponer que el coeficiente de variación no cambia.
- Teniendo en cuenta que el Coeficiente de Seguridad Central,  $C_o$  , se ha definido en la forma:

$$C_o = \frac{\mu_R}{\mu_S} = \frac{\mu_{M_f}}{\mu_{M_c}} = 1.5$$

el Valor Medio,  $\mu_{M_f}$ , de la capacidad de flexión será

$$\mu_{m_f} = C_o \mu_{M_c} = 34.7 \text{ Nxm}$$

y la Desviación Típica,  $\sigma_{M_f}$ , podrá obtenerse a partir del Coeficiente de Variación

$$V_{M_f} = \frac{\sigma_{M_f}}{\mu_{M_f}} = V_{M_f} \mu_{M_f} = 5.2 \text{ Nxm}$$

La Variable Aleatoria que define el Margen de Seguridad,  $M$ , será en este caso

$$M = M_c - M_f; \quad \begin{matrix} M \leq 0 : \text{FALLO} \\ M > 0 : \text{SEGURIDAD} \end{matrix}$$

y sus parámetros,  $\mu_M$ ,  $\sigma_M$ , podrán obtenerse a partir de los correspondientes a la resistencia y al efecto de las cargas, es decir

$$\mu_M = \mu_{M_c} - \mu_{M_f} = 34.7 - 23.1 = 11.6 \text{ Nxm}$$

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_{M_c}^2 + \sigma_{M_f}^2} = \sqrt{3.6^2 + 5.2^2} = 6.32 \text{ Nxm}$$

teniendo en cuenta lo anterior, el Índice de Fiabilidad, será:

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{11.6}{6.32} = 1.84$$

y como

$$\phi(1.84) = 0.96712$$

la Probabilidad de Fallo toma el valor

$$P_f = \phi(1.84) = 0.0329 = 3.29\%$$

b) En este punto se parte de un valor conocido de la Probabilidad de Fallo:

$$P_f = 0.005 = \phi(-\beta) = 1 - \phi(\beta)$$

y como

$$\phi(\beta) = 1 - 0.005$$

el Índice de Fiabilidad será:

$$\beta = \phi^{-1}(0.995) = 2.58$$

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_{M_c} - \mu_{M_f}}{\sqrt{\sigma_{M_c}^2 + \sigma_{M_f}^2}} = \frac{\mu_{M_f} - 23.1}{\sqrt{(0.15 V_{M_f})^2 + 3.6^2}} = 2.58$$

obteniéndose finalmente:

$$\mu_{Mf} = 41.732$$

### 2.2.2. Índice de fiabilidad de Hasofer y Lind

El Índice de Fiabilidad definido por Cornell, tiene ventajas e inconvenientes: ventajas, en cuanto que su cálculo es relativamente sencillo y proporciona una cuantificación de la seguridad, considerando el efecto conjunto de las Variables Básicas. Sin embargo, no proporciona:

- la combinación de variables correspondiente al citado margen de seguridad
- ni tampoco una medida de la sensibilidad del Índice de Fiabilidad frente a la variaciones de las V.B.

Por otra parte, la ecuación (2.5) no es la única forma de expresar la Probabilidad de Fallo; para el caso de dos variables básicas, R y S, una alternativa a lo anterior, se obtendría al considerar un margen de Seguridad

$$M = \ln (R/S) \quad (2.16)$$

que implicaría un Índice de Fiabilidad,

$$\beta = \frac{\mu [\ln (R/S)]}{\sigma [\ln (R/S)]} \quad (2.17)$$

el cuál no podría calcularse mediante una aproximación de Nivel II debido a la no linealidad de la función (2.16).

Considerando de nuevo el problema de dos Variables Aleatorias Independientes, R y S, con distribuciones de probabilidad Normales, es decir:

$$R : N (\mu_R, \sigma_R) \quad ; \quad S : N (\mu_S, \sigma_S)$$

y designando por  $Z_R$  y  $Z_S$  las VA Tipificadas,  $N(0,1)$ , obtenidas de las anteriores mediante las transformaciones

$$Z_R = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad ; \quad Z_S = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \quad (2.18)$$

resultaría que considerando como margen de Seguridad:  $M = R - S$ , este podría escribirse en la forma.

$$M = Z_R \sigma_R - Z_S \sigma_S + (\mu_R - \mu_S)$$

y como

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} ,$$

entonces

$$\beta = \frac{E [Z_R \sigma_R - Z_S \sigma_S + (\mu_R - \mu_S)]}{\sigma [Z_R \sigma_R - Z_S \sigma_S + (\mu_R - \mu_S)]} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (2.19)$$

es decir, Figura 2.5, en el espacio de las variables Tipificadas, el Índice de Fiabilidad,  $\beta$ , es la distancia del origen (0,0) a la recta

$$g (Z) = g (Z_R, Z_S) = Z_R \sigma_R - Z_S \sigma_S + (\mu_R - \mu_S) = 0$$

Obsérvese que la transformación, (2.18),

$$g (R, S) \rightarrow g (Z_R, Z_S)$$

es una traslación de ejes al punto  $O_z (\mu_R, \mu_S)$ , seguida de una homotecia.

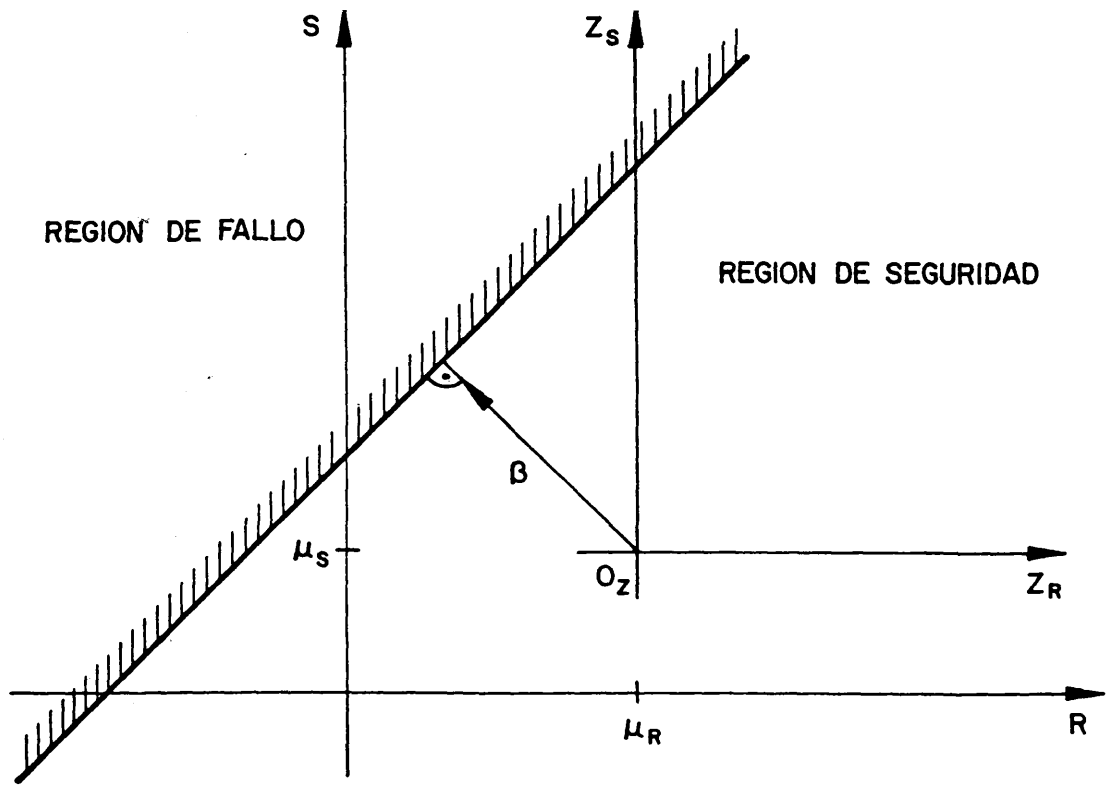


Figura 2.5

En general, para el caso de Funciones de Fallo lineales (2.9) de  $n$  variables aleatorias independientes  $X_i$ , con distribuciones de probabilidad  $N(\mu_i, \sigma_i)$ , no es difícil demostrar que el Índice de Fiabilidad,  $\beta$ ,

$$\beta = \frac{a_o + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i \sigma_i)^2}}$$

representa la distancia del origen, en el espacio de las variables tipificadas,  $N(0, 1)$ ,

$$Z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} ; \quad \begin{matrix} \mu_{Z_i} = 0 \\ \sigma_{Z_i} = 1 \end{matrix}$$

al hiperplano

$$g(Z) = a_o + \sum_{i=1}^n a_i (Z_i \sigma_i + \mu_i)$$

que define la Función de Fallo en el citado espacio.

Manteniendo la idea de que el Índice de Fiabilidad representa una medida de la distancia del origen al Valor Medio de la Función de Fallo (Margen de Seguridad) y debido al hecho de que sea cual fuese la función de densidad de las V.B., siempre es posible determinar distribuciones de probabilidad

tipificadas  $N(0,1)$ , equivalentes a las distribuciones originales; HASOFER y LIND (1974) propusieron como Índice de Fiabilidad: " la mínima distancia desde el origen a la Función de Fallo en el espacio de la V.B. tipificadas ", Figura - 2.6, lo que puede expresarse de la siguiente forma:

$$\beta = \min (\sum_{i=1}^n Z_i^2) = (\underline{Z}^T \cdot \underline{Z}) \quad (2.20)$$

donde  $Z_i$  representa las coordenadas de cualquier punto de la Función de fallo; en particular, el punto  $Z^*$ , que satisface la condición (2.20), recibe el nombre de Punto de Proyecto, y resulta ser la proyección del origen sobre la Función o Superficie de Fallo.

Como el punto  $Z^*$  no se conoce a priori, el problema de encontrar la mínima distancia  $\beta$ , entre el origen y la Función de Fallo, con la condición  $g(\underline{Z}^*)=0$ , es esencialmente un problema de minimización que puede ser resuelto por distintos procedimientos; mientras que en el ejemplo 2.3 se aplica el cálculo variacional, en el apartado 2.3.1 se desarrolla un procedimiento iterativo para el cálculo de  $Z^*$  y en definitiva de  $\beta$ .

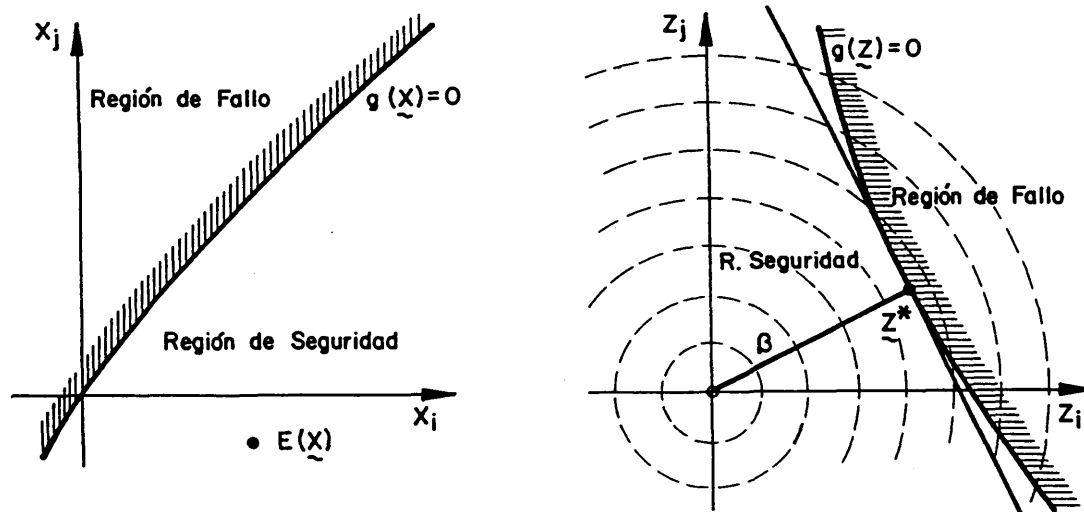


Figura 2.6

En resumen, como puede observarse, las dos definiciones dadas para el Índice de Fiabilidad no son incompatibles y coinciden para funciones de Fallo Lineales de VA,  $X_i$  independientes y Normalmente Distribuidas. El Índice de Fiabilidad propuesto por Hasofer y Lind incluye los mismos conceptos que el de Cornell; soslayando, sin embargo, los inconvenientes que este último presentaba.

### EJEMPLO 2.3

Se desea calcular el Punto de Proyecto  $Z^*$ , y el Índice de Fiabilidad,  $\beta$ ; suponiendo que la Función

de Fallo que caracteriza el Estado Límite de una determinada estructura, en el espacio de las variables tipificadas es:

$$g(Z) = -\frac{4}{25}(Z_1 - 1)^2 - Z_2 + 4 = 0$$



En este ejemplo, y de acuerdo con (2.20), la función que debe minimizarse es:

$$\gamma = \underline{Z}^T \cdot \underline{Z} = (Z_1^2 + Z_2^2)^{1/2}$$

con la condición :  $g(\underline{Z}) = 0$  ; lo que es equivalente en Cálculo Variacional a encontrar el mínimo de la función:

$$\delta = \gamma + \lambda g(\underline{Z})$$

lo que implica que ha de verificarse:

$$\frac{\partial \delta}{\partial Z_i} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} = 0$$

$$\forall i, i=1, \dots, n$$

condiciones que en este caso se traducen en las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial \delta}{\partial Z_1} = Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2)^{-1/2} - \frac{8}{25} (Z_1 - 1) \lambda = 0 \quad (E-1)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial Z_2} = Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2)^{-1/2} - \lambda = 0 \quad (E-2)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \lambda} = -\frac{4}{25} (Z_1 - 1)^2 - Z_2 + 4 = 0 \quad (E-3)$$

eliminando  $\lambda$  entre (E-1) y (E-2), se obtiene:

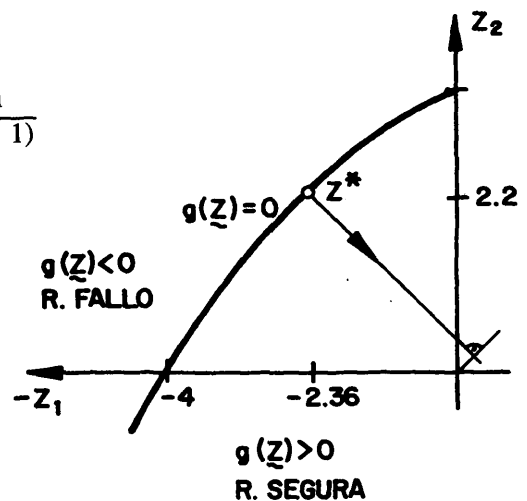
$$Z_2 = \frac{25 Z_1}{8 (Z_1 - 1)}$$

expresión que sustituida en (E-3), permite obtener:

$$Z_1^3 - 3 Z_1^2 - \frac{79}{32} Z_1 + 24 = 0$$

la resolución de la ecuación anterior proporciona finalmente

$$Z_1 = -2.359056$$



siendo en consecuencia

$$Z_2 = 2.1947$$

obtenido el Punto de Proyecto:  $Z = (-2.359056, 2.1947)$ , el cálculo del Índice de Fiabilidad es inmediato:

$$\beta = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} = 3.2221$$

### 2.3. METODOS DE CALCULO DEL INDICE DE FIABILIDAD

Se describen en este apartado los dos Métodos que se han utilizado para estimar el Índice de Fiabilidad de Sistemas Estructurales caracterizados por  $n$  Variables Básicas. Ambos procedimientos se incluyen dentro de los denominados de Nivel II.

El primero de ellos, determina el Índice de Fiabilidad, definido por Hasofer y Lind, utilizando una simplificación de la Función de Fallo, consistente en aproximar la misma Linealmente mediante un desarrollo en serie de Taylor alrededor del Punto de Proyecto.

Por último, el Método de las Estimaciones puntuales permite estimar, a partir de los parámetros de las Variables Básicas, las correspondientes a la distribución de Probabilidad del Margen de Seguridad.

#### 2.3.1. Método de los momentos de segundo orden

Tal y como se comentó en el apartado anterior el Índice de Fiabilidad de Hasofer y Lind,  $\beta_{HL}$ , podía interpretarse como la mínima distancia desde el origen a la Función de Fallo en el espacio de las variables tipificadas,  $N(0,1)$ .

El Método de los Momentos de Segundo Orden, permite calcular el citado índice, y en consecuencia el Punto de Proyecto, utilizando como información básica los dos primeros momentos (vg: valor medio y desviación típica) de las distribuciones de probabilidad de las Variables Básicas, utilizando para ello una aproximación lineal de la Función de Fallo mediante un desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto de Proyecto, lo que proporciona el hiperplano tangente a la Función característica del Estado Límite en el citado punto.

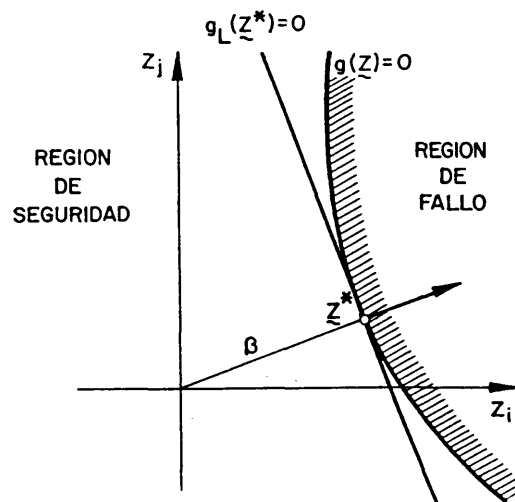


Figura 2.7

Como el punto de proyecto,  $\underline{Z}^*$ , no se conoce a priori, el procedimiento, para Funciones de Fallo no lineales, implica la utilización de un esquema iterativo que será desarrollado en 2.3.1.1.

Por otra parte, si se admite que  $\beta_{HL}$  representa una distancia en el espacio de las variables,  $N(0,1)$ , el primer paso que habrá de efectuarse consistirá en la tipificación de las VB mediante la relación

$$Z_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}$$

transformación que puede realizarse sin complicación alguna, siempre y cuando las variables:

- sean independientes; si este no es el caso, sería necesario encontrar un vector de variables no correlacionadas y al que fuese posible aplicar la transformación anterior, apartado 2.3.1.2.
- están distribuidas normalmente, por lo que en caso contrario será preciso realizar transformaciones previas que permitan obtener distribuciones tipificadas equivalentes a las que inicialmente caracterizan a los VB, apartado 2.3.1.3.

Por último en el apartado 2.3.1.4. se presenta el algoritmo a utilizar para el caso de Estados Límites caracterizados por Funciones de Fallo no lineales definidas por Variables Aleatorias no correlacionadas y con Distribuciones de Probabilidad cualesquiera.

#### 2.3.1.1. Funciones de fallo no lineales, esquema iterativo

Sea  $g(\underline{Z}) = g(Z_1, \dots, Z_n)$  la Función de Fallo no lineal que caracteriza a un determinado Estado

Límite en el espacio de las variables tipificadas.

Si se designa por  $\underline{Z}^{(1)}, \underline{Z}^{(2)}, \dots, \underline{Z}^{(m)}, \underline{Z}^{(m+1)}$  a los vectores Aleatorios representativos del Punto de Proyecto en las iteraciones (1), ..., (m), (m+1),..., la relación entre  $\underline{Z}^{(m)}$  y  $\underline{Z}^{(m+1)}$  puede obtenerse mediante el desarrollo en serie de Taylor de la función:

$$g(\underline{Z}^{(m)}) = 0$$

alrededor de  $\underline{Z}^{(m)}$ ; desarrollo, que considerando solamente los términos lineales podrá escribirse

$$g_L(\underline{Z}^{(m+1)}) = g(\underline{Z}^{(m)}) + \sum_{i=1}^n (Z_i^{(m+1)} - Z_i^{(m)}) \frac{\partial g(\underline{Z}^{(m)})}{\partial Z_i}$$

y en forma matricial

$$g_L(\underline{Z}^{(m+1)}) = g(\underline{Z}^{(m)}) + [\underline{Z}^{(m+1)} - \underline{Z}^{(m)}]^T \cdot \underline{g}_z^{(m)}$$

la expresión anterior representa el hiperplano tangente a la Función de Fallo en el Punto de Proyecto  $\underline{Z}^{(m+1)}$ , que debe satisfacer la condición

$$g_L(\underline{Z}^{(m+1)}) = 0$$

es decir:

$$\underline{g}(\underline{Z}^{(m)}) + [\underline{Z}^{(m+1)} - \underline{Z}^{(m)}]^T \cdot \underline{g}_{\underline{z}}^{(m)} = 0 \quad (2.21)$$

expresión que puede escribirse en la forma

$$[\underline{Z}^{(m+1)}]^T \cdot \underline{g}_{\underline{z}}^{(m)} = [\underline{Z}^{(m+1)}]^T \cdot \underline{g}_{\underline{z}}^{(m)} - \underline{g}(\underline{Z}^{(m)}) \quad (2.22)$$

Por otra parte, si  $\underline{\alpha}^{(m)}$  representa al vector unitario normal a la Función de Fallo en el punto  $\underline{Z}^{(m)}$ , dirigido a la región de Fallo, se tendrá:

$$\underline{\alpha}^{(m)} = -\frac{\underline{g}_{\underline{z}}^{(m)}}{l} \quad (2.23)$$

siendo:

$$l = \sqrt{\underline{g}_{\underline{z}}^{(m)T} \cdot \underline{g}_{\underline{z}}^{(m)}} \quad (2.24)$$

el módulo del gradiente

$$\underline{g}_{\underline{z}}^{(m)} = \left( \frac{\partial g(\underline{Z}^{(m)})}{\partial Z_1}, \dots, \frac{\partial g(\underline{Z}^{(m)})}{\partial Z_n} \right) \quad (2.25)$$

despejando  $\underline{g}_{\underline{z}}^{(m)}$  en (2.23), sustituyendo su valor en (2.22) y dividiendo por el modulo del gradiente se obtiene:

$$[\underline{z}^{(m+1)}]^T \cdot \underline{\alpha}^{(m)} = [\underline{Z}^{(m)}]^T \cdot \underline{\alpha}^{(m)} + \frac{\underline{g}(\underline{Z}^{(m)})}{l}$$

por último, post-multiplicando los dos miembros de la expresión anterior por  $[\underline{\alpha}^{(m)}]^T$  y teniendo en cuenta que, Figura 2.8,

$$\underline{Z}^{(m)} = \underline{\alpha}^{(m)} \cdot \underline{\beta}^{(m)} \quad (2.26)$$

se obtiene finalmente:

$$\underline{Z}^{(m+1)} = \left[ \underline{\beta}^{(m)} + \frac{\underline{g}(\underline{Z}^{(m)})}{l} \right] \underline{\alpha}^{(m)} \quad (2.27)$$

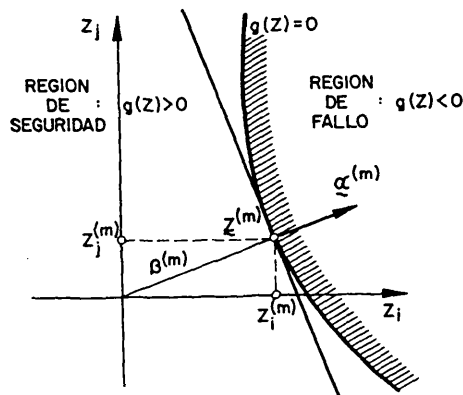


Figura 2.8

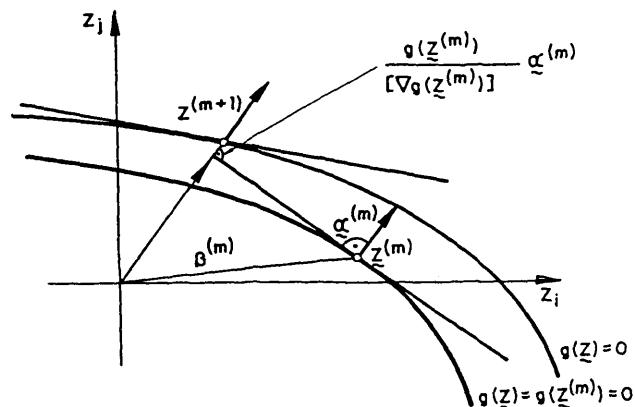


Figura 2.9

es decir el Punto de Proyecto en la iteración  $(m + 1)$ , puede expresarse como suma de dos términos, Figura 2.9.

— el primero, corresponde a la proyección de  $\beta^{(m)}$  sobre la paralela a la normal  $\alpha^{(m)}$ , trazada desde el origen.

— el segundo, se introduce como un término corrector que tenga en cuenta el hecho de que  $g(Z^{(m)})$  puede ser distinta de cero.

Finalmente, es importante observar que los cosenos directores,  $\alpha_i$ , de la normal a la Función de Fallo, proporcionan una medida de la sensibilidad del Índice de Fiabilidad,  $\beta$ , frente a las variaciones de las variables; razón por la que se les designa con el nombre de COEFICIENTES DE SENSIBILIDAD. En efecto, como :

$$\underline{Z} = \underline{\beta} \cdot \underline{\alpha}$$

si se post-multiplican los dos miembros de la igualdad anterior por  $\underline{\alpha}^T$ , se obtiene:

$$\underline{\beta} = \underline{Z} \cdot \underline{\alpha}^T$$

y por tanto:

$$\frac{\partial \beta}{\partial Z_i} = \alpha_i$$

El estudio del signo de  $\alpha_i$  proporciona una regla útil a la hora de caracterizar el comportamiento de una variable. Así, por ejemplo si  $\alpha_i > 0$ , el Índice de Fiabilidad,  $\beta$ , será una función creciente, por lo que puede considerarse que la variable  $Z_i$  "añade" resistencia al Estado Límite.

El esquema iterativo anterior puede resumirse a efectos prácticos mediante el organigrama N-S que se indica en la página siguiente:

# TIPIFICACION DE VARIABLES

$$\begin{matrix} X & \rightarrow & Z \\ \sim & & \sim \end{matrix}$$

| CALCULO DE LA FUNCION DE FALLO         |            |
|--|------------|
| — Espacio de las Variables físicas     | $g(X) = 0$ |
| — Espacio de las Variables Tipificadas | $g(Z) = 0$ |

$$g_{\sim}(Z) = 0$$

# SELECCION DE UN PUNTO DE PARTIDA

## PROCESO ITERATIVO

|                    |   |
|--------------------|---|
| FOR J = 1          | <b>CALCULAR EN EL PUNTO <math>\underline{z^{(j)}} :</math></b><br><br>— Componentes del gradiente<br><br>— Módulo del gradiente<br><br>— Cosenos Directores<br><br>— Función de Fallo |
|                    | <b>CALCULAR INDICE DE FIABILIDAD</b><br><br>$\beta^J = \sqrt{\underline{Z^{(j)r}} \cdot \underline{Z^{(j)}}}$   |
|                    | <b>COMPROBAR ESTABILIZACIÓN DE BETA</b><br><b>CÁLCULO DE</b><br><br>$\underline{z^{(j+1)}} = - \left[ \beta^{(j)} + \frac{g(\underline{Z^{(j)}})}{l} \right] \alpha^{(j)}$            |
| N.º DE ITERACIONES |   |

**TO**

$$\underline{z}^{(j+1)} = - \left[ \underline{\beta}^{(j)} + \frac{g(\underline{z}^{(j)})}{l} \right] \underline{\alpha}^{(j)}$$

**N.º DE ITERACIONES**

## EJEMPLO 2.4

Para la viga indicada en la Figura, calcular el Índice de Fiabilidad; suponiendo que : el Estado Límite de Servicio se alcanza cuando la flecha máxima,  $\frac{5}{48} \cdot \frac{PL^3}{EI}$ , supera el valor  $L/30$ , y las variables  $P, L, E, I$ , tienen Distribuciones de Probabilidad Normales con los siguientes parámetros:

$$\mu_P = 4 \text{ KN}$$

$$\sigma_P = 1 \text{ KN}$$

$$\mu_L = 5 \text{ m}$$

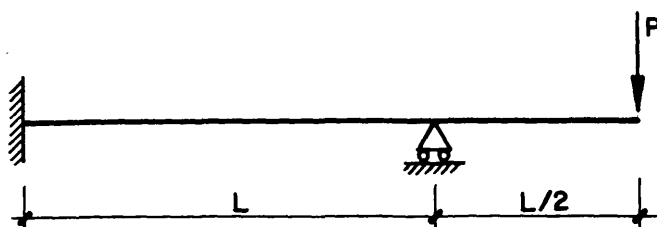
$$\sigma_L = 0$$

$$\mu_E = 2 \times 10^7 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$$

$$\sigma_E = 0,5 \times 10^7 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$$

$$\mu_I = 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\sigma_I = 0,2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$



### 1. Tipificación de la Variables

Dado que  $\sigma_L = 0$ , la variable  $L$  puede considerarse como determinista; por tanto si se designa por:

$$X_1 = I ; X_2 = E ; X_3 = P$$

las variables tipificadas  $Z_i$  serán:

$$Z_1 = \frac{I - \mu_I}{\sigma_I} ; I = Z_1 \sigma_I + \mu_I$$

$$Z_2 = \frac{E - \mu_E}{\sigma_E} ; E = Z_2 \sigma_E + \mu_E$$

$$Z_3 = \frac{P - \mu_P}{\sigma_P} ; P = Z_3 \sigma_P + \mu_P$$

### 2. Cálculo de la Función de Fallo

Para este problema, el incumplimiento del Estado Límite puede plantearse mediante la condición:

$$\mu_{\max} = \frac{5}{48} \frac{PL^3}{EI} > \frac{L}{30}$$

o bien en la forma:

$$\frac{5}{28} \frac{p l^3}{EI} \frac{30}{L} > 1$$

y teniendo en cuenta que  $L = 5$  m, el criterio de fallo puede expresarse como:

$$78.125 P > EI$$

siendo la Función de Fallo

$$g(X) = EI - 78.125 P ; \quad \begin{array}{l} g(X) < 0 : \text{Región de Fallo} \\ g(X) > 0 : \text{Región Segura} \end{array}$$

y en el espacio de las Variables Tipificadas:

$$g(Z) = \sigma_I \sigma_E Z_1 Z_2 + \sigma_E \mu_I Z_2 + \sigma_I \mu_E Z_1 + \mu_I \mu_E - 78.125 \sigma_P Z_3 - 78.125 \mu_P$$

3. Definición de:

— Componentes del Gradiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial Z_1} &= \sigma_I \sigma_E Z_2 + \sigma_I \\ \frac{\partial g}{\partial Z_2} &= \sigma_I \sigma_E Z_1 + \sigma_E \mu_I \\ \frac{\partial g}{\partial Z_3} &= -78.125 \sigma_P \end{aligned}$$

— Módulo del Gradiente

$$l = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial Z_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial Z_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial Z_3}\right)^2}$$

— Cosenos Directores

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\partial g / \partial Z_1}{l} \\ \alpha_2 &= \frac{\partial g / \partial Z_2}{l} \\ \alpha_3 &= \frac{\partial g / \partial Z_3}{l} \end{aligned}$$

— Índice de Fiabilidad

$$\beta = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}$$

— Selección de un punto de partida

$$Z^{(1)} = (-0.5774 ; -0.5774 ; 0.5774)$$



4. PROCESO ITERATIVO:

| ITERACION<br>1 |        |                           |        |            |         |         |                  |
|----------------|--------|---------------------------|--------|------------|---------|---------|------------------|
| VARIABLE       | $Z_i$  | $\partial g/\partial Z_i$ | 1      | $\alpha_i$ | $g(Z)$  | $\beta$ | $\frac{g(Z)}{I}$ |
| I = 1          | - 0,57 | 342,26                    | 564,66 | 0,61       | 1156,11 | 1       | 2,05             |
| E = 2          | - 0,57 | 442,26                    |        | 0,78       |         |         |                  |
| P = 3          | 0,57   | - 78,125                  |        | - 0,14     |         |         |                  |

| ITERACION<br>2 |        |                           |        |            |        |         |                  |
|----------------|--------|---------------------------|--------|------------|--------|---------|------------------|
| VARIABLE       | $Z_i$  | $\partial g/\partial Z_i$ | 1      | $\alpha_i$ | $g(Z)$ | $\beta$ | $\frac{g(Z)}{I}$ |
| I = 1          | - 1,86 | 162,1                     | 361,91 | 0,45       | 163    | 3,05    | 0,45             |
| E = 2          | - 2,38 | 314                       |        | 0,87       |        |         |                  |
| P = 3          | 0,43   | - 78,125                  |        | - 0,22     |        |         |                  |

| ITERACION<br>3 |        |                           |        |            |         |         |                  |
|----------------|--------|---------------------------|--------|------------|---------|---------|------------------|
| VARIABLE       | $Z_i$  | $\partial g/\partial Z_i$ | 1      | $\alpha_i$ | $g(Z)$  | $\beta$ | $\frac{g(Z)}{I}$ |
| I = 1          | - 1,58 | 95                        | 363,45 | 0,26       | - 47,76 | 3,5     | - 0,13           |
| E = 2          | - 3,05 | 342                       |        | 0,94       |         |         |                  |
| P = 3          | 0,77   | - 78,125                  |        | - 0,21     |         |         |                  |

| ITERACION<br>4 |        |                           |        |            |         |         |                  |
|----------------|--------|---------------------------|--------|------------|---------|---------|------------------|
| VARIABLE       | $Z_i$  | $\partial g/\partial Z_i$ | $l$    | $\alpha_i$ | $g(Z)$  | $\beta$ | $\frac{g(Z)}{l}$ |
| I = 1          | - 0,88 | 83                        | 427,48 | 0,19       | - 25,81 | 3,37    | - 0,06           |
| E = 2          | - 3,17 | 412                       |        | 0,96       |         |         |                  |
| P = 3          | 0,41   | - 78,125                  |        | - 0,18     |         |         |                  |

| ITERACION<br>5 |        |                           |        |            |        |         |                               |
|----------------|--------|---------------------------|--------|------------|--------|---------|-------------------------------|
| VARIABLE       | $Z_i$  | $\partial g/\partial Z_i$ | $l$    | $\alpha_i$ | $g(Z)$ | $\beta$ | $\frac{g(Z)}{l}$              |
| I = 1          | - 0,63 | 82                        | 461,44 | 0,1816     | - 1,04 | 3,31    | - 2,3 x<br>x 10 <sup>-3</sup> |
| E = 2          | - 3,18 | 437                       |        | 0,968      |        |         |                               |
| P = 3          | 0,6    | - 78,125                  |        | - 0,1731   |        |         |                               |

| ITERACION<br>6 |       |                           |        |            |        |         |                  |
|----------------|-------|---------------------------|--------|------------|--------|---------|------------------|
| VARIABLE       | $Z_i$ | $\partial g/\partial Z_i$ | $l$    | $\alpha_i$ | $g(Z)$ | $\beta$ | $\frac{g(Z)}{l}$ |
| I = 1          | - 0,6 | 79,82                     | 453,95 | 0,17       | —      | 3,3077  | —                |
| E = 2          | - 3,2 | 440                       |        | 0,97       |        |         |                  |
| P = 3          | 0,6   | - 78,125                  |        | - 0,17     |        |         |                  |

aceptando que  $\beta$  se ha estabilizado en el valor:

$$\beta = 3.3077$$

el Punto de Proyecto, en el espacio de las variables tipificadas, será:

$$Z_1 = -0.6; Z_2 = -3.2018; Z_3 = 0.5726$$

y en el espacio de las variables físicas:

$$I = 0.88 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$E = 0.3991 \times 10^7 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$$

$$P = 4.5726 \text{ KN}$$

es decir, para la anterior combinación de variables, la Probabilidad de Fallo es:

$$\begin{aligned} P_f &= \Phi(-\beta) \\ &= 1 - \Phi(\beta) \\ &= 1 - \Phi(3.3077) = 1 - 0.9995335 \\ &= 0.0467 \% \end{aligned}$$

### 2.3.1.2. Variables correlacionadas

Todo el procedimiento anterior ha sido desarrollado suponiendo que las variables aleatorias  $X_i$  eran independientes por lo que, para el caso en el que estén correlacionadas es preciso realizar transformaciones que las desacoplen.

El problema podría plantearse en los siguientes términos se trata de encontrar la matriz  $A$  de la transformación lineal:

$$\underline{Y} = \underline{A} \cdot \underline{X}$$

que permita obtener el vector de variables desacopladas  $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  partir del vector de variables aleatorias correlacionadas  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$

Si se designa por  $\underline{C}$  a la matriz de correlación de las variables  $Y_i$ ; el hecho de que estas estén desacopladas ( $\rho_{Y_i, Y_j} = 0$ ), implica que la citada matriz es diagonal, siendo sus elementos las varianzas de la variable  $Y_i$ , es decir:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \text{var}(y_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \text{Var}(y_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \text{Var}(y_n) \end{bmatrix}$$

como por otra parte ha de verificarse:

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{A}^T$$

resulta que el problema planteado se ha transformado en el cálculo de autovalores de la matriz, simétrica y definida positiva,  $\underset{\sim}{C}$ ; siendo, entonces las varianzas de las variables  $Y_i$  los autovalores de  $\underset{\sim}{C}$ , y los vectores fila, de la matriz ortogonal  $\underset{\sim}{A}$ , los autovectores correspondientes.

## EJEMPLO 2.5

Para la viga indicada en la Figura - F1, y suponiendo que las dos cargas están distribuidas normalmente, con valor medio  $\mu$ , desviación típica  $\sigma$  y coeficiente de correlación  $\rho$ . Se desea calcular el Índice de Fiabilidad, suponiendo que el Estado Límite Último se alcanza cuando el momento flector producido en A, supera la capacidad a flexión  $M_f$ .

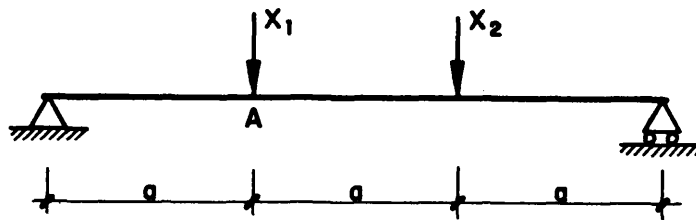


Figura F1

Como las variables  $X_i$  están correlacionadas

$$\underset{\sim}{C} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

las variables desacopladas  $Y_1$  e  $Y_2$ , se obtendrán a partir de la transformación:

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{X}$$

viniendo determinada la matriz  $\underset{\sim}{A}$  por los autovectores de  $\underset{\sim}{C}$ ; para este caso, los autovalores  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y los autovectores  $\underset{\sim}{V}_1$ ,  $\underset{\sim}{V}_2$ , serán:

$$\lambda_1 = \sigma^2 (1 + \rho) ; \quad \underset{\sim}{V}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1, 1)$$

$$\lambda_2 = \sigma^2 (1 - \rho) ; \quad \underset{\sim}{V}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1, -1)$$

siendo entonces la matriz de transformación  $\underset{\sim}{A}$  :

$$\underset{\sim}{A} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y en consecuencia:

$$\underset{-}{Y} = \underset{-}{A} \cdot \underset{-}{X} = \begin{cases} y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (x_1 + x_2) \\ y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$\underset{-}{\mu}_y = \underset{-}{A} \cdot \underset{-}{\mu}_x = \begin{cases} \mu_{y1} = \sqrt{2} \mu \\ \mu_{y2} = 0 \end{cases}$$

$$\underset{-}{C} = \underset{-}{A} \cdot \underset{-}{C} \underset{-}{A}^T = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1+\rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{bmatrix}$$

por lo que las variables tipificadas  $Z_1, Z_2$ , se determinarán mediante las transformaciones:

$$Z_1 = \frac{y_1 - \mu_{y1}}{\sigma_{y1}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sigma \sqrt{1+\rho}} [x_1 + x_2 - 2\mu]$$

$$Z_2 = \frac{y_2 - \mu_{y2}}{\sigma_{y2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sigma \sqrt{1-\rho}} (x_1 - x_2)$$

siendo las relaciones inversas

$$x_1 = \mu + \frac{\sigma \sqrt{2}}{2} [ \sqrt{1-\rho} Z_1 + \sqrt{1+\rho} Z_2 ]$$

$$x_2 = \mu + \frac{\sigma \sqrt{2}}{2} [ \sqrt{1+\rho} Z_1 - \sqrt{1-\rho} Z_2 ]$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que el momento flector es producido en A por las cargas  $x_1$  y  $x_2$  es:

$$\frac{x_1 + 2x_2}{3} a$$

la Función de Fallo que caracteriza al Estado Límite definido podrá expresarse en la forma

$$F_f \equiv M_f - \frac{x_1 + 2x_2}{3} a = 0$$

y si por comodidad se designa por

$$a_0 = M_f$$

$$a_1 = -a/3$$

$$a_2 = -2a/3$$

resulta que, la Función de Fallo,  $F_f$ , puede definirse como:

$$F_f = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

y en el espacio de las variables tipificadas  $Z_1, Z_2$ :

$$F_f = b_0 + b_1 Z_1 + b_2 Z_2 = 0$$

donde:

$$b_0 = a_0 + (a_1 + a_2) \mu$$

$$b_1 = \frac{\sigma\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \rho} (a_1 + a_2)$$

$$b_2 = \frac{\sigma\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \rho} (a_1 - a_2)$$

Puesto que la Función de Fallo es lineal, el cálculo del Índice de Fiabilidad  $\beta_{HL}$ , es inmediato, ya que es la distancia desde el origen a la recta:

$$b_0 + b_1 Z_1 + b_2 Z_2 = 0$$

es decir:

$$\beta_{HL} = \frac{b_0}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

o bien:

$$\beta_{HL} = \frac{a_0 + (a_1 + a_2) \mu}{\sigma \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2\rho a_1 a_2}}$$

Obsérvese que, debido al carácter lineal de la Función de Fallo, el Índice de Fiabilidad obtenido coincide con el propuesto por Cornell:

$$\beta_{HL} = \frac{\mu_{Ff}}{\sigma_{Ff}}$$

Por tanto, cuando las Variables Básicas  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  estén correlacionadas el primer paso a realizar consistirá en la obtención del vector de variables básicas desacopladas

$$\underline{Y} = \underline{A} \cdot \underline{X} \rightarrow \underline{X} = \underline{A}^T \cdot \underline{Y} \quad (2.28)$$

siendo el vector de valores medios

$$\underline{\mu}_Y = \underline{A} \cdot \underline{\mu}_X$$

y la matriz de desviación típicas

$$\underline{\sigma}_Y = \underline{C}^{1/2} = (\underline{A} \cdot \underline{C}_X \cdot \underline{A}^T)^{1/2}$$

en el siguiente paso habrán de tipificarse las variables  $Y_i$ , mediante la transformación:

$$\underline{Z} = \underline{\sigma}_Y^{-1} (\underline{Y} - \underline{\mu}_Y)$$

que en términos de las Variables  $\underline{X}$ , tomará la forma:

$$\underline{Z} = \underline{\sigma}_Y^{-1} \cdot \underline{A} (\underline{X} - \underline{\mu}_X)$$

siendo entonces el Índice de Fiabilidad

$$\beta = (\underline{Z}^T \cdot \underline{Z})^{1/2}$$

es decir:

$$\beta_{HL} = \left[ (\underline{x} - \underline{\mu}_X)^T \cdot \underline{A}^T \cdot \underline{\sigma}_Y^{-2} \cdot \underline{A} (\underline{x} - \underline{\mu}_X) \right]^{1/2}$$

Finalmente, teniendo en cuenta la ortogonalidad de la matriz  $\underline{A}$ , puede escribirse:

$$\beta_{HL} = \left[ (\underline{x} - \underline{\mu}_X)^T \cdot \underline{C}_X^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}_X) \right]^{1/2}$$

### 2.3.1.3. Transformación de variables aleatorias

Si las Distribuciones de Probabilidad de las Variables  $X_i$  No son Normales, la Probabilidad de Fallo, puede obtenerse mediante Distribuciones Normales Equivalentes. La citada transformación es posible siempre para Variables Aleatorias continuas; y para el caso particular en que estén desacopladas, se utiliza el procedimiento indicado en la Figura 2.10:

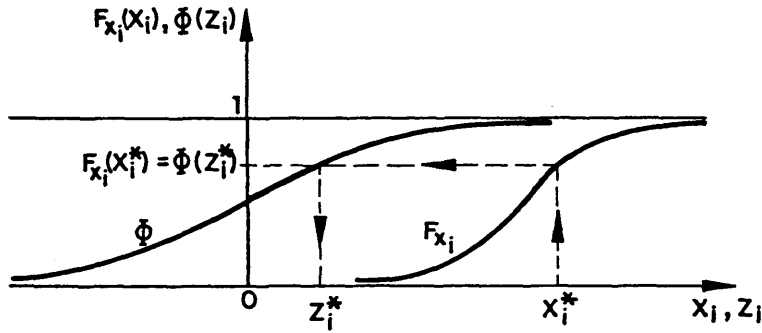


Figura 2.10

Es decir, la transformación se escoge de manera que el valor de la Función de Distribución,  $F_{x_i}(x_i)$ , de la variable  $X_i$  coincida en un punto (vg: Punto de Proyecto), con el correspondiente a la Distribución de Probabilidad,  $\Phi(Z_i)$ , de una variable aleatoria,  $Z_i$ , tipificada. Condición que matemáticamente puede expresarse en la forma:

$$F_{x_i}(X_i^*) = \Phi(Z_i^*) \quad (2.29)$$

$$Z_i^* = \frac{X_i^* - \mu_n}{\sigma_n} \quad (2.30)$$

donde  $\mu_n$  y  $\sigma_n$  corresponden, al Valor Medio y Desviación Típica de la Distribución de Probabilidad equivalente que se desea determinar.

Por otra parte, la Función de Densidad,  $\phi(Z_i)$ , de la variable  $Z_i$ , puede obtenerse teniendo en cuenta el cambio de variable indicado en (2.30); en efecto, como:

$$\phi(Z_i^*) = f_{x_i}(X_i^*) \left| \frac{dx_i}{dz_i} \right|$$

al ser:

$$\left| \frac{dx_i}{dz_i} \right| = \sigma_n$$

resulta que:

$$\sigma_n = \frac{\phi(Z_i^*)}{f_{x_i}(X_i^*)} \quad (2.31)$$

Finalmente, teniendo en cuenta (2.29) y (2.30), puede escribirse:

$$F_{x_i}(X_i^*) = \Phi\left(\frac{X_i^* - \mu_n}{\sigma_n}\right)$$



o lo que es igual:

$$\phi^{-1} \left[ F_{x_i} (X_i^*) \right] = \frac{X_i^* - \mu_n}{\sigma_n}$$

expresión a partir de la cual puede obtenerse el valor de buscado:

$$\mu_n = X_i^* - \sigma_n \phi^{-1} \left[ F_{x_i} (X_i^*) \right] \quad (2.32)$$

Para Variables Aleatorias Correlacionadas, la dependencia entre las mismas ha de expresarse en términos de las Distribuciones de Probabilidad Condicionada. En este caso, las Distribuciones Tipificadas Equivalentes se obtienen, teóricamente, mediante la denominada Transformación de Rosenblatt, Ref. (2.1), que sin embargo es poco útil para problemas prácticos, debido fundamentalmente a la dificultad existente a la hora de caracterizar la dependencia entre las Variables y los posibles Estados Límites.

A pesar de lo anterior, para Variables Correlacionadas, una aproximación razonablemente aceptable se obtiene aplicando el procedimiento descrito en este apartado junto con la transformación ortogonal indicada en (2.28).

### 2.3.2. Método de las estimaciones puntuales

Tal y como se ha descrito en el apartado 2.3.1., el Método de los Momentos de Segundo Orden permite obtener el Índice de Fiabilidad, pero para ello requiere el cálculo y evaluación de las derivadas de la Función de Fallo; tarea nada fácil cuando las funciones que caracterizan a los Estados Límites no vienen dadas en forma implícita.

El Método de las Estimaciones Puntuales, fue propuesto por E. Rosenblueth, Ref. (2.13), y permite estimar el Valor Medio y la Desviación Típica del Margen de Seguridad a partir de los correspondientes a las variables básicas que le determinan.

Considérese una variable X continua, caracterizada estadísticamente por los siguientes parámetros:

Valor medio:  $\mu_x$

Desviación Típica:  $\sigma_x$

Coefficiente de asimetría:  $\alpha_x$

y cuya función de densidad,  $f_x(x)$  es desconocida.

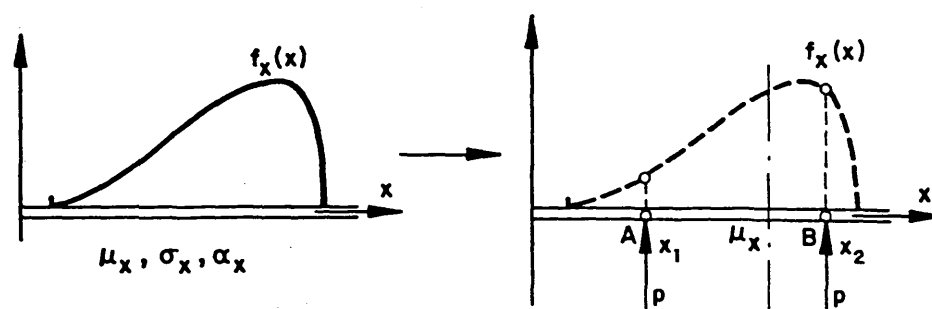


Figura 2.11

La estimación de los valores  $P_1$  y  $P_2$  de la función  $f_x(x)$  en dos puntos situados a distancias  $x_1$  y  $x_2$  del origen puede realizarse teniendo en cuenta que:

a) el área encerrada bajo la curva ha de ser igual a la unidad

$$1 = \int f_x(x) dx = P_1 + P_2 \quad (2.23)$$

Los parámetros  $\mu_x$ ,  $\alpha_x$ ,  $\sigma_x$  han de ser iguales a los correspondientes a la variable discreta, es decir:

$$\mu_x = \int f_x(x) dx = P_1 x_1 + P_2 x_2 \quad (2.34)$$

$$\sigma_x^2 = \int (x - \mu_x)^2 f_x(x) dx = P_1 (x_1 - \mu_x)^2 + P_2 (x_2 - \mu_x)^2 \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \alpha_x \sigma_x^3 &= \int (x - \mu_x)^3 f_x(x) dx \\ &= P_1 (x_1 - \mu_x)^3 + P_2 (x_2 - \mu_x)^3 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Las condiciones anteriores plantean un sistema de ecuaciones cuya resolución permite determinar los valores incógnita  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $P_1$ ,  $P_2$

$$P_1 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \alpha_x^2}} \right] \quad (2.37)$$

$$P_2 = 1 - P_1 \quad (2.38)$$

$$x_1 = \mu_x - \sigma_x \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} \quad (2.39)$$

$$X_2 = \mu_x + \sigma_x \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} \quad (2.40)$$

Cuando la distribución de probabilidad es simétrica  $\alpha_x = 0$ , las expresiones anteriores se reducen a:

$$P_1 = P_2 = 1/2$$

$$X_1 = \mu_x - \sigma_x \quad (2.41)$$

$$X_2 = \mu_x + \sigma_x$$

es decir, en este caso la estimación de la función se realiza en dos puntos equidistantes del valor medio en una desviación típica.

Por otra parte sea  $Y = Y(X)$  una función dependiente únicamente de la variable  $X$ , la estimación de la función de densidad  $f_x(x)$ , obtenida anteriormente en los puntos A y B, puede transferirse a la variable  $Y$  por un procedimiento recíproco al anterior. En efecto, la relación  $Y = Y(X)$  para  $x_1$  y  $x_2$ , proporciona:

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y(x_1) \\ Y_2 &= Y(x_2) \end{aligned} \quad (2.42)$$

y por tanto:

$$\mu_Y = E[Y] = P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= E[Y^2] - E[Y]^2 \\ &= P_1 \cdot Y_1^2 + P_2 \cdot Y_2^2 - \mu_Y^2 \end{aligned}$$

El procedimiento anteriormente descrito se indica de forma esquemática en la Figura - 2.12

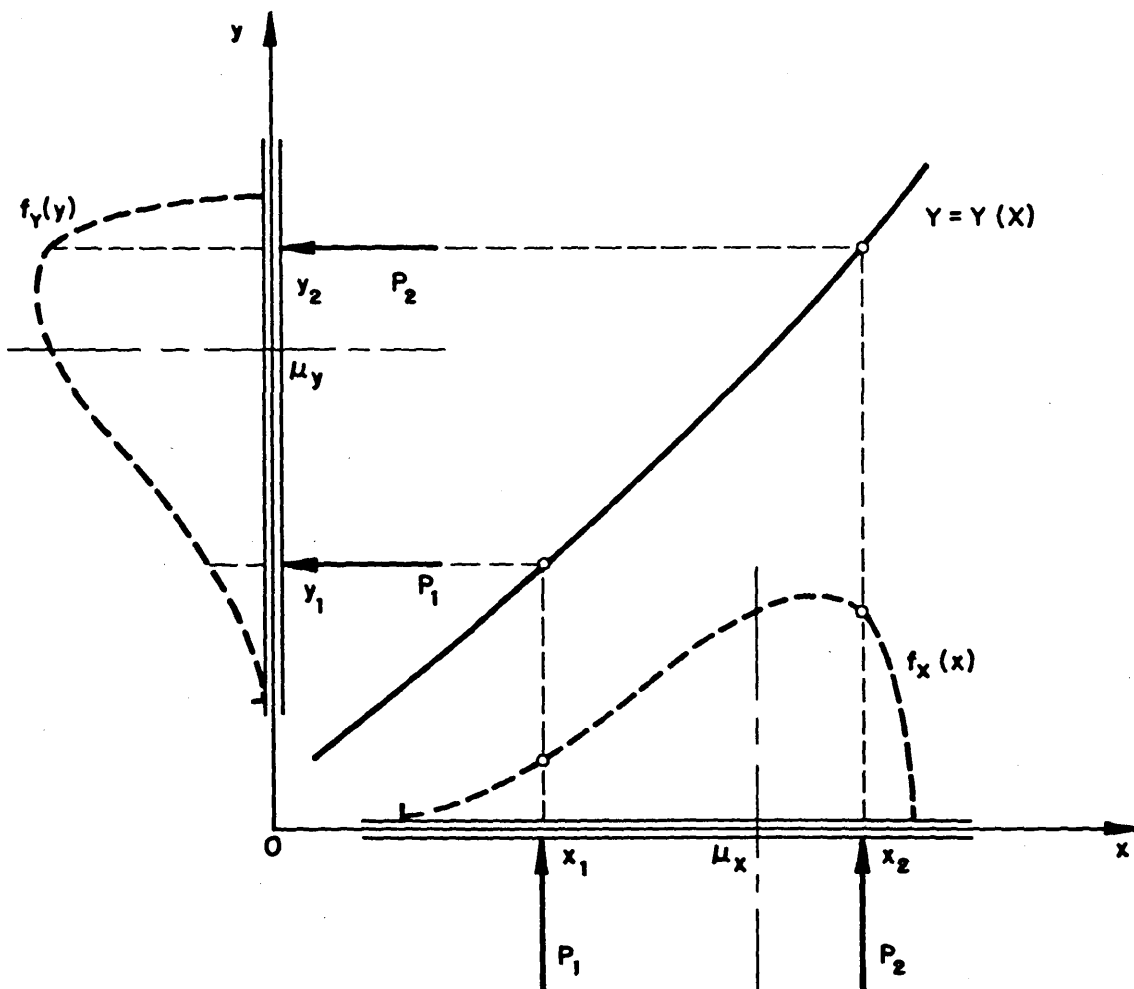


Figura 2.12

## EJEMPLO 2.6

Estimar el valor medio y el coeficiente de variación del volumen de un contenedor cúbico sabiendo que el valor medio de la longitud de la arista es de 2 m y su coeficiente de variación del 10 %.

Si se designa por  $X$  a la variable que caracteriza a la longitud de la arista, conociendo que:

$$\mu_x = 2$$

la desviación típica se calculará teniendo en cuenta:

$$V_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = 0,1$$

es decir:

$$\sigma_x = V_x \mu_x = 0.2$$

y los valores de  $X_1$  y  $X_2$  se obtendrán, para una distribución simétrica, a partir de las ecuaciones (2.41)

$$X_1 = 2 - 0.2 = 1.8$$

$$X_2 = 2 + 0.2 = 2.2$$

por otra parte el volumen del contenedor  $Y = X^3$ ; para  $X_1$ ,  $X_2$  toma los valores:

$$Y_1 = 1.8^3 = 5.832$$

$$Y_2 = 2.2^3 = 10.648$$

y como:

$$P_1 = P_2 = 1/2$$

entonces :

$$\mu_y = \frac{5.832 + 10.648}{2} = 8.24$$

y

$$E [ Y^2 ] = \frac{5.832^2 + 10.648^2}{2} = 73.696$$

$$\sigma_y = \sqrt{E [ Y^2 ] - \mu_y^2} = 2.408$$

Finalmente el coeficiente de variación será

$$V_y = \frac{\sigma_y}{\mu_y} \times 100 = 29.223 \%$$

TABLA 2.2

|                      |
|----------------------|
| VARIABLES            |
| $X_1, X_2$           |
| DATOS                |
| 1: $\mu_1, \sigma_1$ |
| 2: $\mu_2, \sigma_2$ |

| ESTIMACIÓN                 |                       |
|----------------------------|-----------------------|
| VARIABLES                  | FUNCIONES DE DENSIDAD |
| $x_1^1 = \mu_1 - \sigma_1$ | $P_1^1$               |
| $x_1^2 = \mu_1 + \sigma_1$ | $P_1^2$               |
| $x_2^1 = \mu_2 - \sigma_2$ | $P_2^1$               |
| $x_2^2 = \mu_2 + \sigma_2$ | $P_2^2$               |

| CÁLCULO DEL VALOR DE LA FUNCIÓN | ESTIMACIÓN DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE $f(x_1, x_2)$ |
|---------------------------------|---|
| $f_1 = f(x_1^1, x_2^1)$         | $P_1 = P_1^1 - P_2^1$                                 |
| $f_2 = f(x_1^1, x_2^2)$         | $P_2 = P_1^1 - P_2^2$                                 |
| $f_3 = f(x_1^2, x_2^1)$         | $P_3 = P_1^2 - P_2^1$                                 |
| $f_4 = f(x_1^2, x_2^2)$         | $P_4 = P_1^2 - P_2^2$                                 |

| CÁLCULO DEL VALOR MEDIO Y DESVIACIÓN TÍPICA DE LA FUNCIÓN |
|---|
| $\mu_f = \sum_{i=1}^4 P_i f_i$                            |
| $E[F^2] = \sum_{i=1}^4 P_i f_i^2$                         |
| $\sigma_F = \sqrt{E[F^2] - \mu_F^2}$                      |

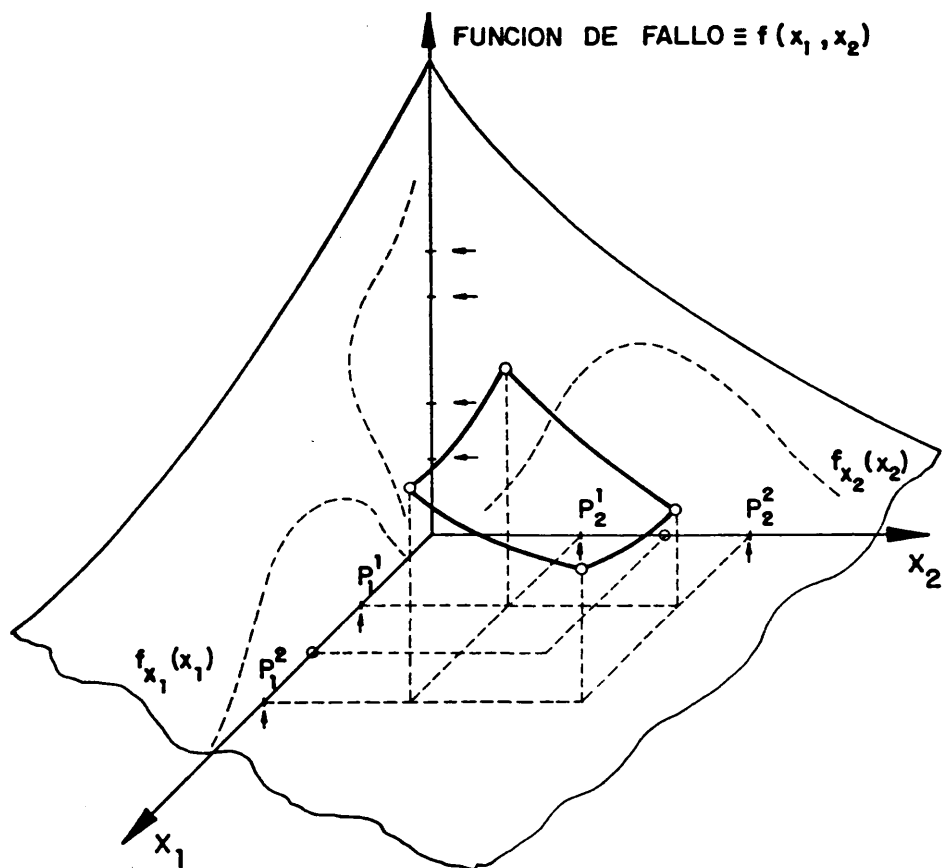


Figura 2.13

El procedimiento para una función  $F = f(x_1, x_2)$  de dos variables aleatorias independientes, con distribución de probabilidad simétrica, se presenta en la Figura 2.13 y puede esquematizarse en la forma indicada en la Tabla 2.2.

En general, para funciones de  $n$  variables, el cálculo del Valor Medio y la Desviación Típica de la Función de Fallo implica estimaciones en  $2^n$  puntos. Así, para el caso de la estructura indicada en el Ejemplo 2.4 se tendría:

| VARIABLE | $\mu_i$         | $\Sigma_i$           | $x_i^1 = \mu_i - \sigma_i$ | $x_i^2 = \mu_i + \sigma_i$ |
|----------|-----------------|----------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1 : I    | $10^{-4}$       | $0,2 \times 10^{-4}$ | $0,8 \times 10^{-4}$       | $1,2 \times 10^{-4}$       |
| 2 : E    | $2 \times 10^7$ | $0,5 \times 10^7$    | $1,5 \times 10^7$          | $2,5 \times 10^7$          |
| 3 : P    | 4               | 1                    | 3                          | 5                          |

dado que las variables tienen distribución de probabilidad simétrica:

$$P_i^1 = P_i^2 = 1/2$$

En este caso, al ser tres las variables implicadas, el valor de la función de fallo:

$$g ( X ) = EI - 78.125 P$$

deberá evaluarse en  $2^3 = 8$  puntos, Figura 2,14

|                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| $A_1 : (X_1^1, X_2^1, X_3^1)$ | $A_2 : (X_1^2, X_2^1, X_3^1)$ |
| $B_1 : (X_1^1, X_2^1, X_3^2)$ | $B_2 : (X_1^2, X_2^1, X_3^2)$ |
| $C_1 : (X_1^1, X_2^2, X_3^1)$ | $C_2 : (X_1^2, X_2^2, X_3^1)$ |
| $D_1 : (X_1^1, X_2^2, X_3^2)$ | $D_2 : (X_1^2, X_2^2, X_3^2)$ |

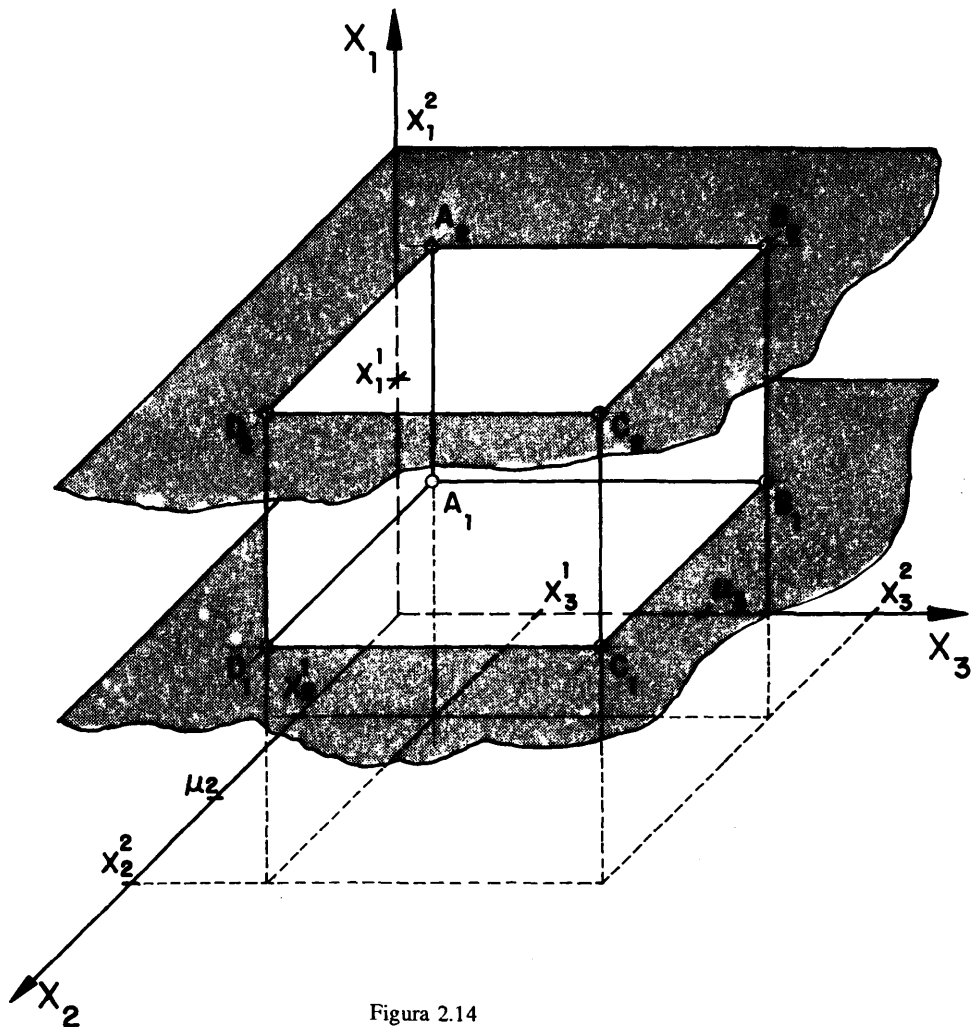


Figura 2.14

| PUNTO | $X_1^i$             | $X_2^i$          | $X_3^i$   | $f_j = g(\underline{X})$ | $f_j^2 = g(\underline{X})^2$ |
|-------|---------------------|------------------|-----------|--------------------------|------------------------------|
| $A_1$ | $x_1^1=0.8x10^{-4}$ | $x_2^1=1.5x10^7$ | $x_3^1=3$ | 965.625                  | $932.4x10^3$                 |
| $B_1$ |                     |                  | $x_3^2=5$ | 809.375                  | $655.1x10^3$                 |
| $C_1$ |                     | $x_2^2=2.5x10^7$ | $x_3^1=3$ | 1765.625                 | $3117.4x10^3$                |
| $D_1$ |                     |                  | $x_3^2=5$ | 1609.375                 | $2590.1x10^3$                |
| $A_2$ | $x_1^2=1.2x10^{-4}$ | $x_2^1=1.5x10^7$ | $x_3^1=3$ | 1565.625                 | $2451.2x10^3$                |
| $B_2$ |                     |                  | $x_3^2=5$ | 1409.375                 | $1986.3x10^3$                |
| $C_2$ |                     | $x_2^2=2.5x10^7$ | $x_3^1=3$ | 2765.625                 | $7648.7x10^3$                |
| $D_2$ |                     |                  | $x_3^2=5$ | 2609.375                 | $6808.8x10^3$                |
|       |                     |                  |           | 13500                    | $26190.1x10^3$               |

A partir de los cálculos anteriores y teniendo en cuenta que:

$$P_j = \frac{1}{2^3}$$

resulta:

$$\mu_F = \sum_{j=1}^8 P_j \cdot f_j = \frac{1}{8} (13500) = 1687.5$$

$$E[F^2] = \sum_{j=1}^8 P_j f_j^2 = \frac{1}{8} (26190.1 \times 10^3) = 3273.7 \times 10^3$$

$$\sigma_f = \sqrt{E[F^2] - \mu_F^2} = 625.766$$



obteniéndose finalmente el Índice de Fiabilidad, mediante:

$$\beta = \frac{\mu_f}{\sigma_f} = \frac{1687.5}{625.766} = 2.585$$

valor que como puede observarse es menor que el obtenido en el ejemplo 2.4; lo que significa al menos para este caso, que el Índice de Fiabilidad calculado por el Método de las Estimaciones Puntuales, está del lado de la Seguridad, ya que cuanto menor sea  $\beta$  mayor será la probabilidad de Fallo, tal y como puede observarse en la Tabla 2.3.

TABLA 2.3

| BETA | Prob. Fallo | BETA | Prob. Fallo |
|------|-------------|------|-------------|
| 0.0  | 0.50000017  | 2.6  | 0.00466122  |
| 0.2  | 0.42074018  | 2.8  | 0.00255519  |
| 0.4  | 0.34457820  | 3.0  | 0.00134997  |
| 0.6  | 0.27425299  | 3.2  | 0.00068720  |
| 0.8  | 0.21185528  | 3.4  | 0.00033698  |
| 1.0  | 0.15865522  | 3.6  | 0.00015915  |
| 1.2  | 0.11506971  | 3.8  | 0.00007237  |
| 1.4  | 0.08075669  | 4.0  | 0.00003169  |
| 1.6  | 0.05479928  | 4.2  | 0.00001335  |
| 1.8  | 0.03593026  | 4.4  | 0.00000542  |
| 2.0  | 0.02275006  | 4.6  | 0.00000211  |
| 2.2  | 0.01390340  | 4.8  | 0.00000079  |
| 2.4  | 0.00819753  | 5.0  | 0.00000029  |

## 2.4.- REFERENCIAS

- (2.1) A.H.S.ANG & W.H.TANG. "Probability Concepts in Engineering Planning and Design". Ed. John Wiley & Sons. 1984
- (2.2) G.AUGUSTI, A.BARATTA & f.CASCIATI. "Probabilistic Methods in Structural Engineering". Ed. Chapman and Hall. Londres. 1984.
- (2.3) W.C.BRODING, F.W.DIEDERICH & P.S.PARKER. "Structural Optimization and Design based on a Reliability Design Criterion". J. Spacecraft, 1, No.1, pp. 56-61. 1964.
- (2.4) C.A.CORNELL. "A Probability-Based Structural Code". Journal of the American Concrete Institute. Vol. 66, No.12, pp. 974-985. 1969
- (2.5) M.E.HARR. "Reliability Based Design in Civil Engineering". Ed. McGraw-Hill. Nueva York. 1987
- (2.6) G.C.HART. "Uncertainty Analysis, Loads, and Safety in Structural Engineering". Ed. Prentice-Hall. 1982.
- (2.7) A.M.HASOFER & N.C.LIND. "Exact and Invariant Second Moment Code Format". Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.100, pp. 111-121. 1979.
- (2.8) W.K.LIU & T.BELYTSCHKO. "Computational Mechanics of Probabilistic and Reliability Analysis".
- (2.9) H.O.MADSEN, S.KRENK & N.C.LIND. "Methods of Structural Safety". Ed. Prentice Hall. 1986.
- (2.10) A.L.MARSHALL. "MARINE CONCRETE". Ed. van Nostrand Reinhold. Nueva York. 1990.
- (2.11) R.E.MELCHERS. "Structural Reliability : Analysis and Prediction". Ed. Ellis Horwood. 1987.
- (2.12) D.PEÑA SANCHEZ DE RIVERA. "Estadística. Modelos y Métodos". Ed. Alianza Universidad Textos. Madrid. 1986
- (2.13) E.ROSENBLUETH. "Two-points estimates in probalities". Appl. Math.Modelling, Vol 5, October. 1981.
- (2.14) P. THOFT-CHRISTENSEN & M.J.BAKER. "Structural Reliability Theory and Its Applications". Ed. Springer-Verlag. 1982.
- (2.15) B. DENDROU. "Comunicación privada". Washington, 1990.

## CAPÍTULO 3

### NORMAS BASADAS EN LOS CONCEPTOS DE FIABILIDAD ESTRUCTURAL

#### 3.1. INTRODUCCIÓN

La construcción ha existido desde el principio de los tiempos como una necesidad básica del ser humano para protegerse de las inclemencias del tiempo y contra sus enemigos; no siendo menos cierto que el tránsito de la barbarie a la civilización ha sido el hecho que ha marcado el comienzo de la Historia, propiamente dicha. Este importante paso supuso la necesidad de establecer Normas, escritas o no, capaces de conseguir un equilibrio entre la libertad individual y el interés de la colectividad.

De esta forma, aparecieron los primeros códigos que regularon las actividades de la sociedad, desde el comercio a la religión pasando por la construcción. Entre todos ellos, probablemente el más famoso y con toda seguridad el más importante desde nuestro punto de vista, fue el Código de Hammurabi en 1760 antes de J.C.

Hammurabi fue el sexto rey de la dinastía semita de Babilonia y su código, que se conserva en el Museo del Louvre, contiene las primeras Normas escritas de las que se tiene noticia acerca de la actividad constructiva.

La originalidad del código procede de la formulación Simple y Clara de unos principios supuestamente emanados de las divinidades.

Entre sus 282 artículos, distribuidos en 34 columnas, en las que los caracteres cuneiformes se leen de arriba abajo, cinco de ellos, del 229 al 233, especifican los requisitos que han de conseguirse en la actividad constructiva y las sanciones que han de imponerse a aquellos que las omitan.

Art. 229.—Si un constructor edifica una casa para un hombre, y no hace su construcción sólida, y de resultas de ello la casa que ha construido se derrumba y produce la muerte del propietario, deberá ser muerto.

Art. 230.—Si causa la muerte del hijo del propietario de la casa, entonces un hijo del constructor deberá ser muerto.

Art. 231.—Si causa la muerte de un esclavo del propietario de la casa, entonces el constructor deberá dar al propietario de la casa un esclavo de igual valor.

Art. 232.—Si destruye alguna propiedad, el constructor deberá reponer lo destruido y, como quiera que no construyó la casa de manera sólida y se derrumbó, deberá reconstruirla a sus expensas.

Art. 233.—Si un constructor construye una casa para un hombre y no lo hace con los requisitos necesarios, y de resultas de ello una pared se derrumba, el constructor deberá reforzar dicha pared a sus expensas.

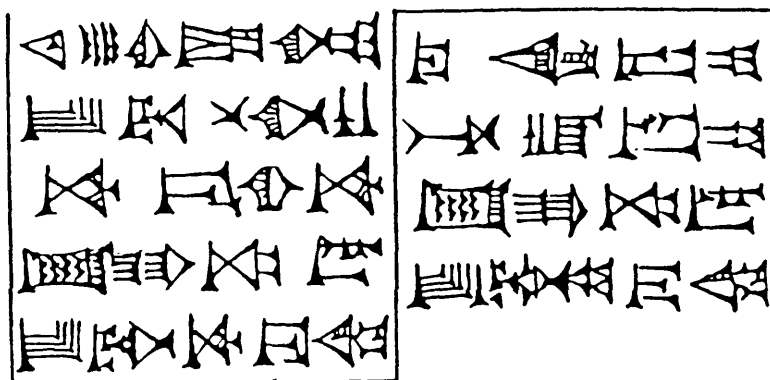


Figura 3.1.

En la Figura 3.1, Ref. (3.4), se indican las reglas 230 y 231 correspondientes al citado código.

La necesidad de aplicar el método científico al proceso constructivo, comenzó en Italia durante el Renacimiento, y se afianzó a mediados del siglo pasado cuando a la utilización ya generalizada del acero en la construcción se añadió la del hormigón armado. La proliferación de estructuras en esta época unida al colapso de alguna de ellas y a los accidentes provocados por la explosión de calderas y recipientes a presión, provocó la aparición de Normas que, sin necesidad de basarse en el principio del "ojo por ojo" recogiesen las consideraciones mínimas que en caso de tenerse en cuenta garantizarían estructuras del lado de la seguridad.

Una característica común a la actual generación de códigos es la utilización de Factores Parciales de Seguridad en la comprobación de los distintos Estados Límites. Este tipo de formatos fue, al parecer, introducido por primera vez en Dinamarca en 1940 en el proyecto de estructuras de hormigón armado y en especificaciones geotécnicas; pudiéndose encontrar en nuestro país un enfoque análogo en la norma de hormigón armado, HA-61, Ref. (3.23), en la que cabe destacar la importante aportación personal de Eduardo Torroja y el notable trabajo de A. Páez.

A nivel internacional, en 1976 el CEB (Comité Européen du Béton); en base a modificaciones de formatos previos propuso, para el establecimiento de la seguridad, como formato de cálculo:

$$g_R \left( \frac{f_{ki}}{\gamma_{m1}, \gamma_{m2}, \gamma_{m3}} \right) \geq g_S (\gamma_{f1} \gamma_{f2} \gamma_{f3} Q_{ki})$$

siendo  $\gamma_{mi}$  y  $\gamma_{fi}$  factores parciales de ponderación que reflejan la variabilidad y las incertidumbres existentes en la determinación de los valores característicos,  $f_{ki}$  y  $Q_{ki}$ , de la resistencia de los materiales y de las cargas.

Un formato de características muy similares al anterior fué el adoptado en 1977 por el NRCC (National Research Council of Canada):

$$\phi R \geq g_S (\gamma_S D + \psi \gamma_I (\gamma_L L + \gamma_w Q + \gamma_T T))$$

las letras mayúsculas representan valores característicos de: la resistencia, R; carga muerta, D; sobrecargas, L; viento, nieve y sismos, Q; efectos térmicos, T.  $\gamma_S$ ,  $\gamma_L$ ,  $\gamma_w$ ,  $\gamma_T$  los factores de ponderación de las cargas y  $\phi$ , el correspondiente a la resistencia. Por último;  $\gamma_I$  es el denominado Factor de Importancia que mide las consecuencias del fallo ( $\gamma_I = 1$  para estructuras habituales y  $\gamma_I > 1$  para estructuras de gran responsabilidad), y  $\psi$  un factor de combinación de acciones que contempla la posibilidad de que las cargas L, Q y T alcancen los valores característicos simultáneamente.

Este formato presenta, frente al adoptado por el CEB, la ventaja de su sencillez al englobar en un único factor  $\phi$ , todas las incertidumbres inherentes a la resistencia; sin embargo, esta ventaja se convierte en su principal inconveniente cuando se trata de aplicar a sistemas estructurales con elementos de diferentes materiales.

Una alternativa a los formatos anteriormente mencionados, y que probablemente constituya hoy en día el prototipo de la nueva generación de códigos, es el denominado LRFD (Load and Resistance Factor Design), que fue objeto en 1978 de un número monográfico del ASCE, Ref. (3.2). Los ocho artículos de la citada publicación son el resumen del proyecto de investigación, que subvencionado por el AISI (American Iron and Steel Institute), fué dirigido entre 1969 y 1975 por Ravindra y Galambos. El criterio de proyecto en su forma más general puede expresarse mediante:

$$\phi R_n \geq \sum_{k=1}^n \gamma_k S_{km}$$

donde R es la resistencia nominal, y  $\phi$  el factor de minoración que refleja las incertidumbres asociadas a la citada variable.

La diferencia fundamental de este formato con los indicados previamente se presenta al considerar que  $S_{km}$  es el Valor Medio del Efecto de la Carga y no el valor, bien nominal o característico, de la acción.

La ventaja principal de un formato de estas características se basa en la posibilidad de incorporar explícitamente a los Factores de Ponderación, mediante la aplicación de los Métodos de Nivel II, las incertidumbres asociadas a las variables, a través de los Coeficientes de Variación, Distribuciones de Probabilidad e Índice de Fiabilidad.

### 3.2. RELACION ENTRE LOS METODOS DE COMPROBACION DE LA SEGURIDAD: NIVEL I - NIVEL II

En el capítulo anterior se han presentado dos alternativas que, en base a un planteamiento probabilista, permitan cuantificar los niveles de seguridad de una estructura; bien es cierto que la eficacia de los mismos viene condicionada por la existencia o no de datos suficientes que permitan describir estadísticamente las variables.

Por otra parte, y por razones obvias los criterios de proyecto y las reglas de combinación de acciones que debe reflejar una Norma, han de ser tan simples como sea posible y deben desarrollarse de manera que resulten familiares para los usuarios y proyectistas; condicionantes que, a primera vista, son difíciles de cumplir mediante la utilización de un Método de Nivel II.

En este apartado se presentan dos procedimientos que aplicando la metodología anteriormente citada, permiten evaluar los Factores de Ponderación de las variables. En lo que sigue se ha supuesto que el formato de cálculo utilizado en una hipotética Norma puede representarse en la forma más simple mediante la condición:

$$\phi R \geq \sum_{i=1}^n \gamma_i S_i \quad (3.1)$$

donde:

$\gamma$  = factor de amplificación del efecto de la carga S.

$\phi$  = factor de minoración de la resistencia R.

### 3.2.1. Obtención de los coeficientes de ponderación mediante el metodo de los momentos de segundo orden

El procedimiento indicado en el apartado 2.3.1., determinaba el Punto de Proyecto  $Z^*$  en el Espacio de las Variables Tipificadas, mediante la relación:

$$Z_i = - \beta \alpha_i^* \quad (3.2)$$

donde  $\alpha_i^*$  son los Coeficientes de Sensibilidad definidos en (2.23), y la aplicación de la transformación :

$$Z_i^* = \frac{X_i^* - \mu_i}{\sigma_i}$$

proporciona la expresión del citado punto en el Espacio de las Variables Físicas:

$$X_i^* = \mu_i + \sigma_i Z_i = \mu_i \left[ 1 + \frac{\sigma_i}{\mu_i} Z_i^* \right]$$

o, tras la sustitución de (3.2):

$$X_i^* = \mu_i (1 - V_i \beta \alpha_i^*) \quad (3.3)$$

siendo  $V_i = \frac{\sigma_i}{\mu_i}$  , el Coeficiente de Variación de la variable  $X_i$ .

Por lo que, la Función de Fallo evaluada en el punto  $X^*$  , podrá escribirse como sigue:

$$g(X^*) = g(\mu_i (1 - V_i \beta \alpha_i^*)_{i=1, \dots, n}) = 0 \quad (3.4)$$

Esta función, representativa del Estado Límite considerado, deberá ser compatible con el formato de cálculo elegido, y si en este se utilizan Factores de Ponderación de las variables referidas a los valores medios resulta que dichos factores, definidos habitualmente como la relación entre el valor de proyecto  $X_i^*$  y el valor medio  $\mu_i$ , podrán expresarse, con las consideraciones previas como:

$$\gamma_i = \frac{X_i^*}{\mu_i} = 1 - V_i \beta \alpha_i^* \quad (3.5)$$

siendo, entonces, la ecuación característica del Estado Límite:

$$g(\gamma_1 \mu_1, \gamma_2 \mu_2, \dots, \gamma_n \mu_n) = 0 \quad (3.6)$$

Si el formato de cálculo está referido a los valores característicos; los Factores de Ponderación se obtienen, por ejemplo para una variable de carga, teniendo en cuenta que el valor característico de la misma se define en la forma:

$$X_{iK} = \mu_i (1 + K_i V_i)$$

donde la constante  $K_i$  se calcula imponiendo la condición de que la variable  $X_i$  tenga una probabilidad  $P$  de no ser sobrepasada, por lo que el Factor de Ponderación en este caso es:

$$\gamma_i = \frac{X_i^*}{X_{iK}} = \frac{1 - V_i \beta \alpha_i^*}{1 + K_i V_i} \quad (3.7)$$

### EJEMPLO 3.1

Supóngase que en base al Formato de Cálculo

$$\phi R_n \geq \gamma_D D_n + \gamma_L L_n$$

donde el subíndice  $n$  indica los valores Nominales de Proyecto de las variables; se desea calibrar los Factores de Ponderación  $\phi$ ,  $\gamma_D$  y  $\gamma_L$  de forma que la estructura proyectada tenga un Índice de Fiabilidad de 2.5.

Los citados factores deberán obtenerse teniendo en cuenta que:

$$\mu_L / \mu_D = 2$$

$$V_R = 0.11 \quad ; \quad V_D = 0.1 \quad ; \quad V_L = 1.18$$

$$V_R = 0.95 \quad ; \quad V_D = 0.95 \quad ; \quad V_L = 1.18$$

siendo:

$$V_R = \frac{R_n}{\mu_R} \quad ; \quad V_D = \frac{D_n}{\mu_D} \quad ; \quad V_L = \frac{L_n}{\mu_L}$$

los coeficientes que expresan la relación entre los valores nominales y medios de las variables  $R$ ,  $D$ ,  $L$ , distribuidas normalmente y que representan respectivamente a la Resistencia y al efecto de la carga muerta y sobrecarga.

El formato de cálculo definido implica una Función de Fallo Lineal, es decir:

$$g(X) = R - D - L = 0$$

por lo que el Índice de Fiabilidad,  $\beta$ , y los Coeficientes de Sensibilidad,  $\alpha_i$ , podrán expresarse mediante las siguientes relaciones:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_D - \mu_L}{\delta}$$

$$\alpha_R = \frac{\mu_R V_R}{\delta}$$

$$\alpha_D = - \frac{\mu_D \cdot V_D}{\delta}$$

$$\alpha_L = - \frac{\mu_L \cdot V_L}{\delta}$$

siendo  $\delta$ :

$$\delta = \sqrt{V_R^2 \mu_R^2 + V_D^2 \mu_D^2 + V_L^2 \mu_L^2}$$

en este ejercicio:

$$V_R = 0.11 \quad ; \quad V_D = 0.1 \quad ; \quad V_L = 0.25$$

y como:

$$\mu_L = 2 \mu_D$$

lo que implica:

$$\delta = \sqrt{0.11^2 \mu_R^2 + 0.26^2 \mu_D^2}$$

$$25 = \frac{\mu_R - 3 \mu_D}{\delta}$$

eliminando  $\delta$  entre las dos expresiones anteriores, es posible obtener una relación entre  $\mu_R$  y  $\mu_D$ :

$$\mu_R = \mu_D [3.24544 \pm 1.59828] = \begin{pmatrix} 4.84371 \mu_D \\ 1.64716 \mu_D \end{pmatrix}$$

y tomando la primera de ellas:

$$\mu_R = 4.84371 \mu_D$$

resulta:

$$\delta = 0.73749 \mu_D$$

$$\alpha_R = \frac{4.84371 \mu_D \times 0.11}{0.73749 \mu_D} = 0.72247$$

$$\alpha_D = \frac{-\mu_D \times 0.1}{0.73749 \mu_D} = -0.1356$$

$$\alpha_L = \frac{-2 \mu_D \times 0.25}{0.73749 \mu_D} = -0.67798$$

Siendo, entonces los Factores de Ponderación, respecto a los Valores Medios:

$$\phi = (1 - \alpha_R \beta V_R) = 1 - 0.72247 \times 2.5 \times 0.11 = 0.80132 = 0.8$$

$$\gamma_D = (1 - \alpha_D \beta V_D) = 1 + 0.1356 \times 2.5 \times 0.1 = 1.0339 = 1.03$$

$$\gamma_L = (1 - \alpha_L \beta V_L) = 1 + 0.67798 \times 2.5 \times 0.25 = 1.42374 = 1.42$$

por lo que el formato de cálculo respecto a los citados valores, toma la forma:

$$0.8 \mu_R \geq 1.03 \mu_D + 1.42 \mu_L$$

Para determinar los factores de Ponderación respecto a los Valores Nominales habrá de tenerse en cuenta que:

$$v_R = R_n / \mu_R \rightarrow \mu_R = R_n / v_R = R_n / 0.95$$

$$v_D = D_n / \mu_D \rightarrow \mu_D = D_n / v_D = D_n / 0.95$$

$$v_L = L_n / \mu_L \rightarrow \mu_L = L_n / v_L = L_n / 1.18$$

resultando finalmente que el formato de cálculo respecto a estos valores puede representarse mediante la condición:

$$0.8 \frac{R_n}{0.95} \geq 1.03 \times \frac{D_n}{0.95} + 1.42 \frac{L_n}{1.18}$$

o bien:

$$0.84 R_n \geq 1.08 D_n + 1.2 L_n$$

Por último, el Coeficiente de Seguridad Central, referido a valores nominales, es decir:

$$\theta_n = \frac{\gamma_n}{\phi_n}$$

podrá evaluarse teniendo en cuenta que:

$$1.08 D_n + 1.2 L_n = \gamma_n (D_n + L_n)$$

es decir:

$$\gamma_n = \frac{1.08 D_n + 1.2 L_n}{D_n + L_n} = \frac{1.08 + 1.2 \frac{L_n}{D_n}}{1 + \frac{L_n}{D_n}}$$

y como:

$$L_n = v_L \mu_L$$



$$D_n = v_D \mu_D$$

$$\mu_L = 2 \mu_D$$

se tiene:

por tanto:

$$\frac{L_n}{D_n} = \frac{v_L \mu_L}{v_D \mu_D} = 2 \frac{v_L}{\mu_D} = 2 \frac{1.18}{0.95} = 2.48$$

$$\gamma_n = \frac{1.08 + 1.2 \times 2.48}{1 + 2.48} = 1.17$$

siendo el Factor de Seguridad Central:

$$\vartheta_n = \frac{\gamma_n}{\phi} = \frac{1.17}{0.84} = 1.39$$

### 3.2.2. Formatos de cálculo en valores medios y valores característicos

La eficacia del procedimiento expuesto en el apartado previo es cuestionable; no por el procedimiento en sí, sino por la dificultad que entraña el cálculo de los Coeficientes de Sensibilidad cuando la función característica del Estado Límite es altamente no Lineal.

El procedimiento que se indica a continuación permite, aunque con un grado de aproximación menor que el presentado anteriormente, establecer Factores de Ponderación en base a un control indirecto del margen de Seguridad.

#### A. FORMATOS DE CALCULO EN VALORES MEDIOS

Este apartado tiene por objetivo determinar qué coeficientes  $\phi$ ,  $\gamma_i$  deben escogerse cuando el formato de cálculo se presenta en la forma:

$$\phi R_m \geq \sum_{i=1}^n \gamma_i S_{im}$$

siendo  $R_m$  y  $S_{im}$  los valores medios de la resistencia y del efecto de la carga  $S_i$ .

#### — Variables Aleatorias Normales

Designando por R y S a las variables que caracterizan a la Resistencia y al efecto de la Carga y suponiendo que ambas tienen una distribución de probabilidad Normal:

$$R : N (\mu_R, \sigma_R) ; V_R = \frac{\sigma_R}{\mu_R}$$

$$S : N (\mu_S, \sigma_S) ; V_S = \frac{\sigma_S}{\mu_S}$$

Si se define el Margen de Seguridad, F, de la forma:

$$F = R - S$$

el Índice de Fiabilidad,  $\beta = \frac{\mu_F}{\sigma_F}$ , podrá expresarse, (2.14) en la forma:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{(V_R^2 \mu_R^2 + V_S^2 \mu_S^2)}}$$

por otra parte, de acuerdo, con la Ref. (3.20), la desviación típica de la variable F puede escribirse:

$$\sigma_F \approx \alpha (\sigma_R + \sigma_S) = \alpha (V_R \mu_R + V_S \mu_S)$$

donde  $\alpha$  es el denominado coeficiente de separación de variables e igual a:

$$\alpha = 0.75 \pm 0.06$$

con un error < 10 %, Figura 3.2, si:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\sigma_R}{\sigma_S} \leq 3$$

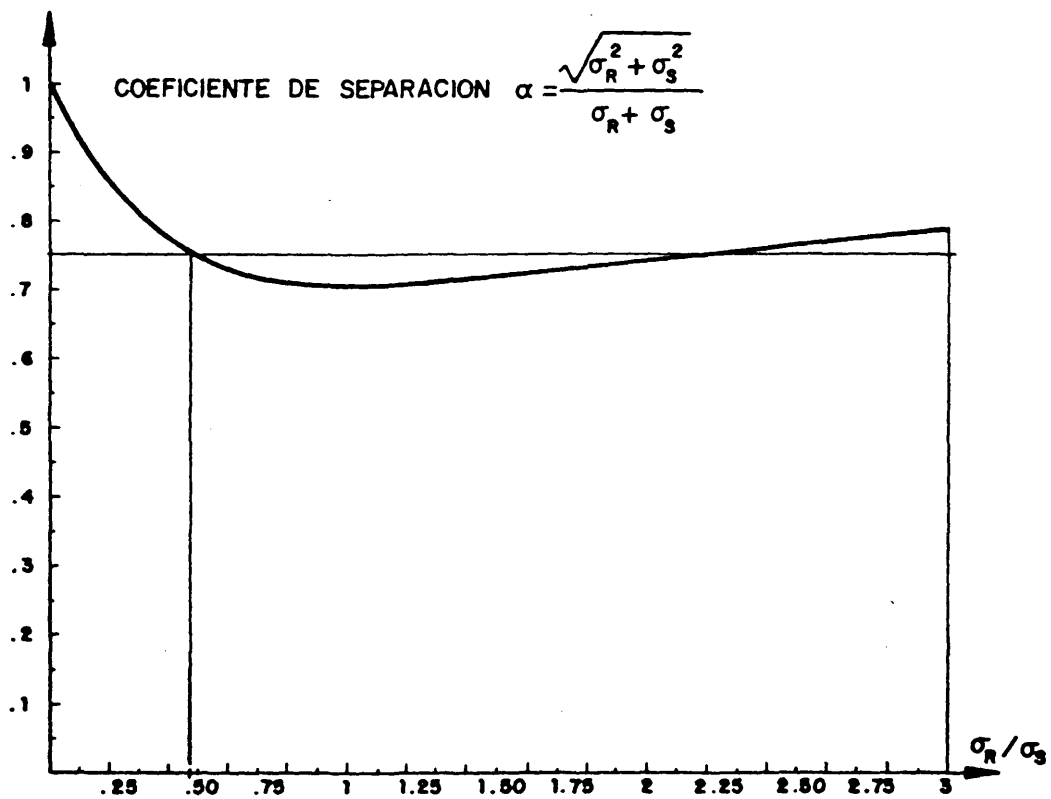


Figura 3.2

Con las consideraciones anteriores, el índice de fiabilidad será:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\alpha V_R \mu_R + \alpha V_S \mu_S}$$

es decir:

$$\beta (\alpha V_R \mu_R + \alpha V_S \mu_S) = \mu_R - \mu_S$$

y agrupando términos:

$$\mu_R (1 - \alpha \beta V_R) = \mu_S (1 + \alpha \beta V_S)$$

expresión que puede relacionarse con el Coeficiente de Seguridad Central en la forma:

$$\lambda_0 = \frac{\mu_R}{\mu_S} = \frac{1 + \alpha \beta V_S}{1 - \alpha \beta V_R}$$

siendo, referidos a los valores medios, los Factores de Ponderación:

$$\phi = 1 - \alpha \beta V_R \equiv \text{FACTOR DE RESISTENCIA}$$

$$\gamma_S = 1 + \alpha \beta V_S \equiv \text{FACTOR DE CARGA}$$

— *Variables Aleatorias Logarítmico Normales*

Si R y S son Variables Aleatorias con distribución logarítmica-Normal:

$$R : \log - N (\mu_R, \sigma_R) \quad ; \quad V_R = \frac{\sigma_R}{\mu_R}$$

$$S : \log - N (\mu_S, \sigma_S) \quad ; \quad V_S = \frac{\sigma_S}{\mu_S}$$

entonces la probabilidad de fallo podría escribirse:

$$P_f = \text{Prob} (1n R - 1n S \leq 0) = \text{Prob} (< F \leq 0)$$

siendo

$$F = 1n R - 1n S$$

el Margen de Seguridad; y al hacer el cambio

$$X = 1n R \quad ; \quad Y = 1n S$$

las variables aleatorias X e Y tienen distribuciones de probabilidad Normales

$$X : N (\mu_x , \sigma_x)$$

$$Y : N (\mu_y , \sigma_y)$$

por lo que la Probabilidad de Fallo será:

$$P_f = Prob ( X - Y \leq 0 ) = \Phi (-\beta)$$

siendo:

$$\beta = \frac{\mu_F}{\sigma_F} = \frac{\mu_x - \mu_y}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que:

$$\sigma_x^2 = \ln (V_R^2 + 1) \quad ; \quad \sigma_y^2 = \ln (V_S^2 + 1)$$

$$\mu_x = \ln \mu_R - \frac{1}{2} \sigma_x^2 \quad ; \quad \mu_y = \ln \mu_S - \frac{1}{2} \sigma_y^2$$

el Índice de Fiabilidad, puede escribirse en función de  $\mu_R$ ,  $\mu_S$ ,  $\sigma_R$  y  $\sigma_S$  en la forma:

$$\beta = \frac{\ln \frac{\mu_R}{\mu_S} \sqrt{\frac{1 + V_S^2}{1 + V_R^2}}}{\sqrt{\ln [(1 + V_R^2) (1 + V_S^2)]}}$$

para  $V_R, V_S < 0.3$  la expresión anterior se simplifica:

$$\beta = \frac{\ln (\mu_R / \mu_S)}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}}$$

y haciendo la aproximación:

$$\sqrt{V_R^2 + V_S^2} \approx \alpha (V_R + V_S)$$

el índice de fiabilidad podría escribirse, finalmente, en la forma:

$$\beta = \frac{\ln (\mu_R / \mu_S)}{\alpha (V_R + V_S)}$$

o lo que es igual:

$$\frac{\mu_R}{\mu_S} = e^{\beta \alpha (V_R + V_S)}$$

y separando las variables:

$$\mu_R e^{-\beta \alpha V_R} = \mu_S e^{-\beta \alpha V_S}$$

o bien :

$$\mu_R \phi = \mu_S \gamma_S$$

por lo que los Factores de Ponderación para este tipo de distribución son:

$$\phi = e^{-\beta \alpha V_R} ; \gamma_S = e^{\beta \alpha V_S}$$

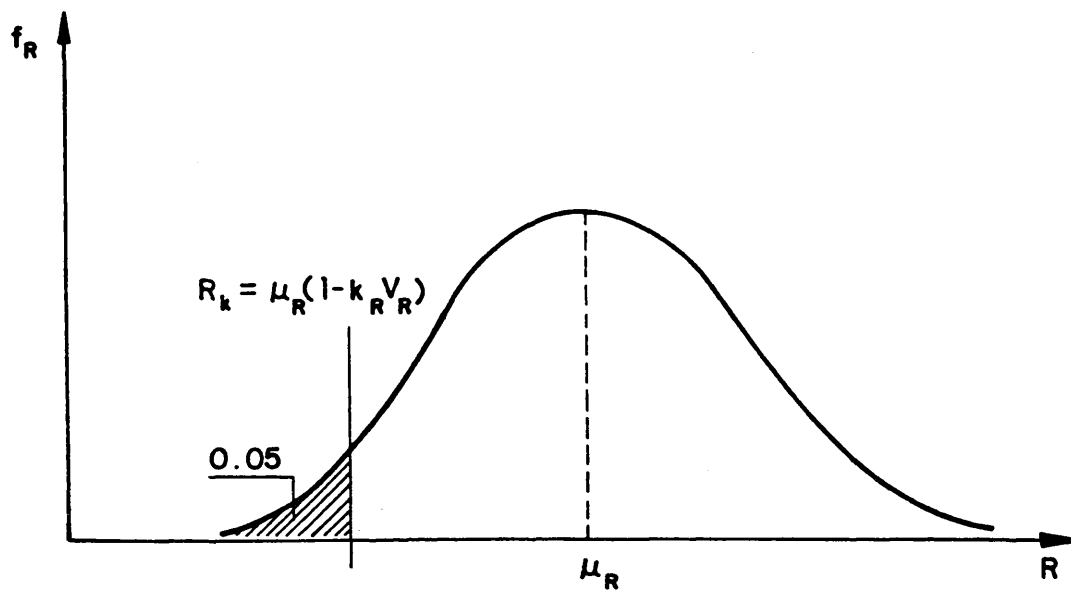
## B. Formatos de cálculo en valores característicos

En la normativa española se utilizan frecuentemente valores de cargas y resistencias que difieren generalmente de los valores medios y que se denominan valores característicos.

Para Resistencia, los valores característicos se definen por debajo de los valores medios, mediante expresiones del tipo:

$$R_K = \mu_R (1 - K_R V_R) \quad (3.8)$$

es decir, el Valor Característico de la Resistencia es el valor para el cual existe una probabilidad del 5 % de que se presenten valores más bajos que el dado.



Las propiedades de la distribución  $N(0,1)$ , permiten escribir:

$$0.05 = Prob(R \leq R_K) = \Phi \left( \frac{R_K - \mu_R}{\sigma_R} \right)$$

es decir:

$$\Phi^{-1}(0.05) = -1.645 = \frac{R_K - \mu_R}{\sigma_R}$$

por lo que:

$$R_K = \mu_R - 1.645 \sigma_R = \mu_R (1 - 1.645 V_R) \quad (3.9)$$

siendo:

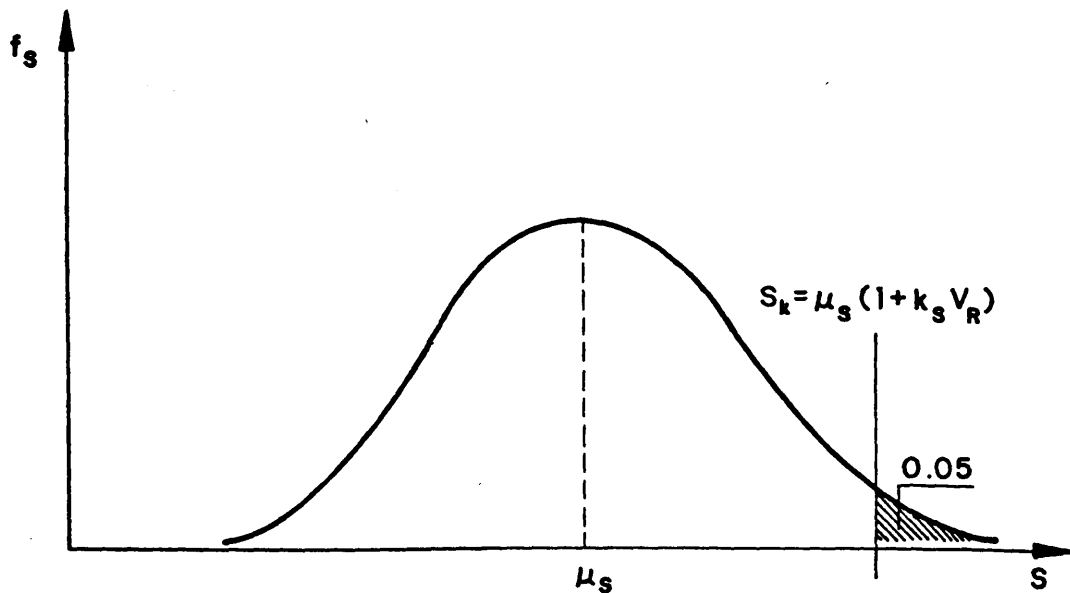
$$K_R = 1.645 \quad (3.10)$$

De una forma análoga el Valor Característico de una Carga, se define como un valor situado por encima del valor medio:

$$S_K = \mu_S (1 + K_S V_S) \quad (3.11)$$

y si, al igual que con la resistencia, se considera una probabilidad del 95 % de que dicho valor no sea sobrepasado se tendría, si la distribución de la Variable Aleatoria que representa el efecto de la carga es  $N(\mu_S, \sigma_S)$

$$s_K = \mu_S (1 + 1.645 V_S) \quad (3.12)$$



Si la función de distribución de la Variable Aleatoria S es  $\log - N(\mu_S, \sigma_S)$  puede escribirse:

$$F_S = \left( \frac{\ln S - \mu_y}{\sigma_y} \right)$$

lo que es igual a:

$$0.95 = \Phi \left( \frac{\ln S - \mu_y}{\sigma_y} \right)$$

y como:

$$\Phi^{-1}(0.95) = 1.645$$

entonces:

$$\ln S = \mu_y + 1.645 \sigma_y \quad (3.13)$$

siendo  $\mu_y$  y  $\sigma_y$  el valor medio y la desviación típica de la Variable Aleatoria  $Y = \ln S$ , que tiene una distribución  $N(\mu_y, \sigma_y)$ , con parámetros:

$$\sigma_y^2 = \ln(V_s^2 + 1) \quad (3.14)$$

$$\mu_y = \ln \mu_s - \frac{1}{2} \sigma_y^2 \quad (3.15)$$

De acuerdo con lo anterior, la expresión (3.13) puede escribirse en la forma siguiente:

$$\ln S = 1.645 \sqrt{\ln(V_s^2 + 1)} + \ln \mu_s - \frac{1}{2} \ln(V_s^2 + 1)$$

o bien:

$$\ln S - \ln \mu_s = 1.645 \sqrt{\ln(V_s^2 + 1)} - \frac{1}{2} \ln(V_s^2 + 1)$$

por lo que:

$$\frac{S}{\mu_s} = e^{1.645 \sqrt{\ln(V_s^2 + 1)} - \frac{1}{2} \ln(V_s^2 + 1)} \quad (3.16)$$

es decir, si una variable aleatoria,  $S$ , tiene una distribución  $\log-N(\mu_s, \sigma_s)$ , con coeficiente de variación  $V_s = \frac{\sigma_s}{\mu_s}$  su valor característico será:

$$S_K = \mu_s e^{1.645 \sqrt{\ln(V_s^2 + 1)} - \frac{1}{2} \ln(V_s^2 + 1)} \quad (3.17)$$

En resumen, los valores característicos se obtienen de los valores medios a través de relaciones del tipo:

$$\begin{aligned} R_K &= \alpha_{RK} \cdot R_m & ; & & R_m &= \mu_R \\ S_K &= \alpha_{SK} \cdot S_m & ; & & S_m &= \mu_S \end{aligned} \quad (3.18)$$

siendo:  $\alpha_{RK}$  y  $\alpha_{SK}$  los factores característicos para resistencias y cargas que toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned} * \quad \alpha_{RK} &= 1 - 1.645 V_R ; \text{ si } R : N(\mu_R, \sigma_R) \\ * \quad \alpha_{SK} &= 1 + 1.645 V_S ; \text{ si } S : N(\mu_S, \sigma_S) \\ * \quad \alpha_{SK} &= e^{1.645 \sqrt{\ln(V_s^2 + 1)} - \frac{1}{2} \ln(V_s^2 + 1)} ; \text{ si } S : \log-N(\mu_S, \sigma_S) \end{aligned} \quad (3.19)$$

A la vista de lo anterior, el formato de cálculo:

$$\phi R_m \geq \sum_{i=1}^n \gamma_i Q_{im}$$

expresado respecto a valores característicos, se escribiría en la forma:

$$\frac{\phi}{\alpha_{RK}} R_K \geq \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\alpha_{Sik}} S_{ik} \quad (3.20)$$

donde  $\phi$  y  $\gamma_i$  son los Factores de Ponderación, respecto a los valores medios, calculados en el apartado anterior.

En la Tabla 3.1, se presenta un resumen de los Factores de Ponderación, obtenidos en este apartado, en función del tipo de variable y el formato de cálculo.

TABLA 3.1

| FORMATO DE CALCULO   | TIPO DE VARIABLE      | FACTORES DE PONDERACION   |  |
|--|-----------------------|---|--|
|  |                       | RESISTENCIA   | CARGA  |
| VALORES MEDIOS<br>$\phi R_m \geq \sum_{i=1}^n \gamma_i S_{mi}$   | NORMAL                | $\phi = 1 - \alpha \beta \gamma_R$                                | $\gamma = 1 + \alpha \beta \gamma_{S1}$                          |
|  | LOGARITMICO<br>NORMAL | $\phi = e^{-\beta \alpha \gamma_R}$                               | $\gamma = e^{\beta \alpha \gamma_{S1}}$                          |
| VALORES CARACTERISTICOS<br>$\frac{\phi}{\alpha_{RK}} R_K \geq \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\alpha_{Sik}} S_{ik}$ | NORMAL                | $\alpha_{RR} = 1 - k_R V_R$                                       | $\alpha_{SR1} = 1 + k_R V_{S1}$                                  |
|  | LOGARITMICO<br>NORMAL | $\alpha_{RK} = e^{-k_R \sqrt{\ln(1+V_R^2) - \ln \sqrt{1+V_R^2}}}$ | $\alpha_{SR} = e^{k_S \sqrt{\ln(1+V_S^2) - \ln \sqrt{1+V_S^2}}}$ |

A partir del planteamiento anterior, es posible construir gráficos como el indicado en la Figura - 3.3. Estos gráficos son la representación de " formulas de proyecto ", y permiten calcular los Factores de Ponderación a partir del Índice de Fiabilidad y del Coeficiente de Variación.

Tabla 3.2

| CLASE DE SEGURIDAD | TIPO DE FALLO       |                     |        |
|--------------------|---------------------|---------------------|--------|
|                    | Dúctil con reservas | Dúctil sin reservas | Frágil |
| Baja               | 3.1                 | 3.7                 | 4.2    |
| Normal             | 3.7                 | 4.2                 | 4.7    |
| Alta               | 4.2                 | 4.7                 | 5.2    |



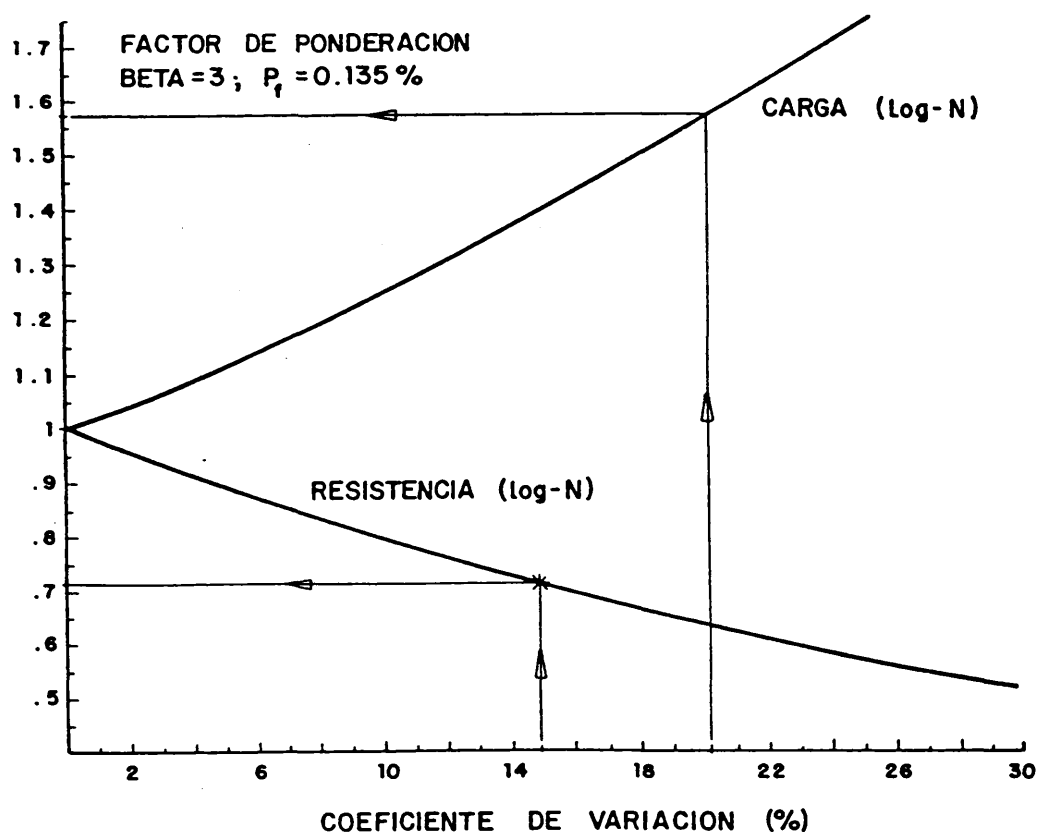


Fig. 3.3

En cuanto a los valores que el Índice de Fiabilidad puede tomar, en la Tabla 3.2, se indican, los que a título de ejemplo se citan en el Working Document del JCCS en Noviembre de 1989, Ref. (3.15):

Los Índices de Fiabilidad varían según la normativa que se consulte, y así, con formatos LRFD, Ravindra y Galambos, Ref. (3.2), recomiendan los siguientes valores:

$\beta = 3$  : Estructuras Habituales

$\beta = 4.5$  : Estructuras de Gran Responsabilidad

$\beta = 2.5$  : Estructuras Temporales

mientras que, el Eurocódigo - 1 "Acciones sobre las Estructuras, propone en la parte 6ª referente a losas y forjados:

| Periodo de Retorno<br>T (años) | ESTADO LIMITE |          |
|--------------------------------|---------------|----------|
|                                | Ultimo        | Servicio |
| 1                              | 4.70          | 3.0      |
| 50                             | 3.83          | 1.5      |

### 3.3. APLICACION A UN CASO PRACTICO

Hoy en día, el diseño de báculos y columnas de alumbrado está siendo sometido a un importante proceso de revisión con objeto de homogeneizar los métodos utilizados en las diferentes países de la C.E.E. Este proceso de codificación abarca múltiples detalles geométricos, tolerancias, definición de acciones, etc..

En este apartado se van a comentar solamente las consideraciones que, en base a los procedimientos expuestos en apartados anteriores, han permitido elaborar una propuesta con objeto de calibrar los coeficientes de ponderación que, aplicados a los valores característicos de las acciones, permiten obtener las cargas a utilizar en el cálculo de este tipo de estructuras.

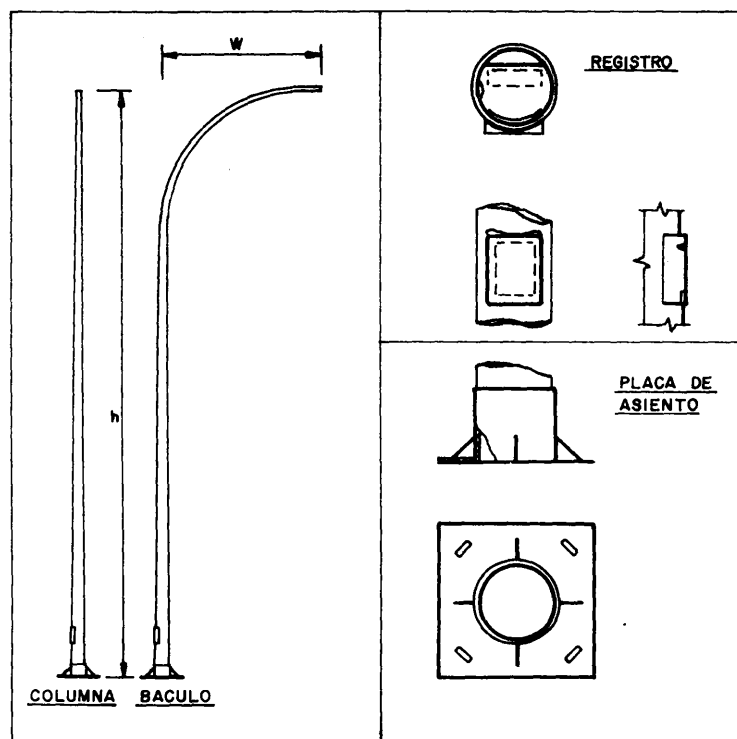


Figura 3.4

Los báculos y columnas de iluminación, Figura -3.4, responden en principio, a un esquema muy sencillo: una estructura tubular de pared delgada asimilable a una viga de Euler -Bernouilli. Sin embargo, tan pronto como aparecen las perforaciones del registro, el panorama cambia por completo y se plantea la necesidad de utilizar una teoría más refinada que permita reflejar el desplazamiento del centro de esfuerzos cortantes en la sección abierta, la concentración de tensiones en las esquinas de agujero, las posibles plastificaciones locales, etc.

Las acciones a considerar en este tipo de estructuras se deben a dos solicitaciones predominantes: el Peso Propio y el viento.

En lo que al Peso Propio se refiere se utilizan los valores característicos de la estructura y una luminaria tipo que, en la última versión de las normativas españolas al respecto, es de 4500 cm<sup>2</sup> y 30 kg de peso.

Por otra parte la norma UNE 72-406-84 establece la carga del viento sobre un elemento mediante el producto:

$$W = A \cdot c \cdot q$$

donde:

$A$  = área proyectada del elemento sobre un plano perpendicular a la dirección del viento.

$c$  = coeficiente de forma.

$q$  = presión de cálculo.

estableciendo para  $q$ :

$$q = 500 \alpha \beta K$$

siendo:

$\alpha$  = coeficiente corrector de altura.

$\beta$  = factor de comportamiento dinámico.

$K$  = factor de corrección para la situación del candelabro.

en consecuencia la carga de viento puede expresarse en la forma:

$$W = 500 A c \alpha \beta K \quad (3.21)$$

Como puede observarse, el tratamiento de la acción del viento es muy completo; apareciendo, no obstante un factor,  $k$ , a determinar por cada nación que mayor los valores de la presión básica y que está directamente relacionada con el mapa eólico del país.

A la vista de lo anterior el Formato de cálculo que se propone es el siguiente:

$$\phi R \geq \gamma_E (\gamma_{PP} PP, \gamma_W W) \quad (3.22)$$

siendo  $R$  el valor característico de la resistencia del material (generalmente la tensión del límite elástico) y  $\phi$  un factor de minoración de la misma que tiene en cuenta las incertidumbres que originan la aleatoriedad de esta variable.  $PP$  y  $W$  representan respectivamente los efectos del peso propio y viento, siendo  $\gamma_{PP}$  y  $\gamma_W$  los correspondientes factores de mayoración y  $\gamma_E$  un factor que introduce las incertidumbres del modelo de cálculo.

En líneas generales se puede decir que los  $\gamma$  dependen del tipo de distribución de probabilidad escogido, del coeficiente de variación  $V$  de la misma y del Índice de Fiabilidad que se quiera imponer a la construcción.

Se indican, a continuación, las ideas utilizadas para seleccionar los coeficientes de variación de las variables básicas.

## RESISTENCIA

Para esta variable se ha considerado que la incertidumbre de la resistencia proviene de las correspondientes a las siguientes variables aleatorias:

$M$  = Representa las variaciones existentes en la determinación de las propiedades mecánicas del material.

Se incluyen en ella las incertidumbres correspondientes a las deficiencias existentes en las bases de datos relativas a ensayos, o a su descripción, ya que por consideraciones prácticas y económicas las propiedades se determinan mediante ensayos sobre un número reducido de muestras sobre el sistema real.

Por otra parte la tensión límite del acero se considera como una variable básica, aunque está clara su dependencia de la composición química y parámetros microestructurales.

Teniendo en cuenta lo anterior, y suponiendo que las propiedades se determinan sin errores experimentales apreciables y que el control en la composición química del material es aceptable, se ha tomado como coeficiente de variación para esta variable:

$$V_M = 10 \%$$

F = Caracteriza las incertidumbres producidas como consecuencia del proceso de fabricación, incluyendo entre otras las variaciones introducidas en la geometría durante el proceso de laminación o galvanizado.

En este sentido, cabe hacerse entre otras las siguientes preguntas:

- ¿Con qué nivel de confianza es posible asegurar un espesor constante de chapa?.
- ¿Qué margen de error existe entre las dimensiones (diámetros, longitud recta del brazo, etc.) teóricas y las reales?.

En el supuesto de que existe un buen control de calidad en el proceso de fabricación, puede considerarse un coeficiente de variación para F:

$$V_F = 8 \%$$

P = Recoge las incertidumbres del modelo teórico utilizado para caracterizar el comportamiento del material. Esta variable refleja, por tanto, las simplificaciones utilizadas en la determinación de la resistencia a partir de los modelos de diseño. Las incertidumbres son el resultado de la utilización de aproximaciones para las expresiones teóricas; considerando, por citar alguna, la hipótesis de homogeneidad, el comportamiento elástico, elasto-plástico, etc..

Aunque no existen datos suficientes que permitan determinar con "exactitud" el coeficiente de variación de la variable P, las comparaciones realizadas entre valores de resistencia de diseño y los modelos teóricos son lo suficientemente cercanos como para poder considerar, para esta variable, un coeficiente de variación:

$$V_P = 8 \%$$

Suponiendo que no existe correlación entre las variables M, F y P, el coeficiente de variación de la resistencia puede escribirse en la forma:

$$V_R = \sqrt{V_M^2 + V_F^2 + V_P^2}$$

siendo  $V_M$ ,  $V_F$  y  $V_P$  los coeficientes de variación de las variables M, F y P.

Sustituyendo los valores anteriores se obtiene para la Resistencia un coeficiente de variación:

$$V_R = 15.1 \%$$

En lo que a la distribución de probabilidad se refiere, se ha considerado a la Resistencia como una Variable Aleatoria con distribución Normal ( $R_m$ ,  $\sigma_R$ ); siendo  $R_m$  y  $\sigma_R$  el valor medio y la desviación típica de la variable.

## INCERTIDUMBRES DEL MODELO (E)

El análisis estructural utiliza modelos matemáticos que relacionan la carga aplicada con la respuesta. Estos modelos, por lo general, suelen presentarse en forma determinista y pueden ser empíricos o estar basados en un conocimiento profundo del problema. Sin embargo, salvo excepciones, es poco probable poder realizar predicciones muy precisas acerca de la magnitud de la respuesta incluso para cargas cuyos valores son conocidos exactamente.

En otras palabras, la respuesta de una estructura tiene incertidumbres adicionales a las existentes en la determinación de las cargas y resistencia.

Esta fuente adicional de incertidumbre se produce, por ejemplo, como consecuencia de:

- Las hipótesis simplificativas realizadas (en pequeñas deformaciones no se consideran los efectos de 2º orden).
- Discretización utilizada para modelizar la geometría; en el caso de báculos, la parte curva se modela con cuatro elementos; la zona del registro con dos.
- Cálculo de las características mecánicas de la sección; el Area e Inercia consideradas son las correspondientes a la sección media del elemento; la última barra que representa el casquillo de la luminaria se ha supuesto con una rigidez muy elevada.
- Precisión del ordenador utilizado para resolver el sistema de ecuaciones.

Este tipo de incertidumbres se recogen en la variable aleatoria E que representa las simplificaciones realizadas en el método de análisis utilizado para calcular la respuesta del sistema estructural.

Una estimación razonable de este tipo de incertidumbre podría reflejarse tomando como coeficiente de variación para E:

$$V_E = 5 \%$$

es decir, se considera que existe una buena adecuación, aún con las consideraciones previas, entre la respuesta del sistema real y la proporcionada por el método de cálculo empleado.

Esta variable aleatoria se ha supuesto distribuida con una función logarítmico normal.

## PESO PROPIO (PP)

La carga debida al Peso Propio del sistema estructural es por lo general igual a la suma del Peso Propio de cada uno de los componentes individuales del sistema; es por esta razón y en virtud del Teorema Central del Límite por lo que la variable P se considera distribuida normalmente, es decir:

$$P : N (P_m, \sigma_{pp})$$

Es sencillo demostrar que cuando la carga permanente que actúa sobre un sistema es igual a la suma de las cargas de los componentes individuales, entonces el coeficiente de variación de la carga total

es mucho menor que el de sus componentes individuales; por lo que se ha considerado para el Peso Propio un coeficiente de Variación:

$$V_{PP} = 8 \%$$

## VIENTO

La distribución de probabilidad logarítmico - normal se utiliza frecuentemente para modelar variables aleatorias que pueden expresarse como producto de n variables aleatorias independientes, es decir, si:

$$W = W_1 \cdot W_2 \dots W_n = \prod_{i=1}^n W_i \quad (3.23)$$

entonces la variable:

$$Y_w = \ln W = \sum_{i=1}^n \ln W_i$$

tiende a distribución N ( $Y_{wM}$ ,  $\sigma_y$ ), mientras que W tiende a una distribución log —N ( $W_m$ ,  $\sigma_N$ ), sea cual fuese la función de distribución de  $\ln W_i$ .

Observando las expresiones (3.21) y (3.23), puede concluirse que la carga de viento tal y como está recogida en la normativa actual puede representarse aceptablemente mediante una variable aleatoria con distribución log-N.

A efectos del cálculo del coeficiente de variación, la variable aleatoria W podría considerarse en función de las dos siguientes:

Q = Variable aleatoria que refleja las hipótesis simplificativas realizadas en la determinación de la presión de cálculo q y en consecuencia de los factores. Dadas las deficiencias del mapa de viento considerado para el cálculo de K, puede aceptarse que el coeficiente de Variación para Q sea:

$$V_Q = 19 \%$$

C = Variable aleatoria que representa las incertidumbres existentes en el proceso de transformación realizado al pasar la presión a carga sobre la estructura; en esa variable intervienen tanto el coeficiente de forma como el área proyectada; a la vista de la información disponible, se ha considerado un coeficiente de variación:

$$V_C = 6 \%$$

según lo anterior:

$$V_w \approx \sqrt{V_c^2 + V_q^2} = 0.2$$

En resumen, para las variables básicas que definen el problema, se ha obtenido:

**R: RESISTENCIA.**

$$\begin{aligned} &V.A \text{ con distribución } N (R_m, \sigma_R) \\ &\text{coef. variación } V_R = 0.151 \\ &\phi = 1 - 0.75 \beta V_R \\ &\alpha_{RK} = 1 - 1.645 V_R \end{aligned}$$

**E: INCERTIDUMBRES DEL MODELO.**

$$\begin{aligned} &V.A. \text{ con distribución log - } N \\ &\text{coef. variación } V_E = 0.05 \\ &\gamma_E = e^{0.75 \beta V_E} \end{aligned}$$

**PP: PESO PROPIO**

$$\begin{aligned} &V.A \text{ con distribución } N ( PP_m, \sigma_{pp} ) \\ &\text{coef. variación } V_{pp} = 0.08 \\ &\gamma_{pp} = 1 + 0.75 \beta V_{pp} \\ &\alpha_{PK} = 1 + 1.645 V_{pp} \end{aligned}$$

**W: VIENTO**

$$\begin{aligned} &V.A. \text{ con distribución log - } N ( W_m, \sigma_m ) \\ &\text{coef. variación } V_w = 0.2 \\ &\gamma_w = e^{0.75 \beta V_w} \\ &\alpha_{WK} = e^{1.645 \sqrt{\ln(V_w^2 + 1) - \ln V_w^2}} \end{aligned}$$

Por último, tomando un Índice de Fiabilidad,  $\beta = 3$  equivalente a la elección de una probabilidad de fallo del orden de 1.85 por mil que es la habitual en la construcción, puede escribirse:

$$\begin{aligned} R : \phi &= 0.66 \\ \alpha_{RK} &= 0.752 ; \frac{\phi}{\alpha_{RK}} = 0.878 \end{aligned}$$

$$E = \gamma_E = 1.119$$

$$\begin{aligned} PP : \gamma &= 1.18 \\ \alpha_{PK} &= 1.132 ; \frac{\gamma_{PP}}{\alpha_{PK}} = 1.043 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W : \gamma &= 1.568 \\ \alpha_{WK} &= 1.358 ; \frac{\gamma_w}{\alpha_{WK}} = 1.154 \end{aligned}$$

y el formato de cálculo quedaría:

$$\frac{\phi}{\alpha_{RK}} R_K \geq \gamma_E \left( \frac{\gamma_{PP}}{\alpha_{PK}} PP_K, \frac{\gamma_W}{\alpha_{WK}} W_K \right) \quad (3.24)$$

sustituyendo los valores anteriores:

$$0.878 R_K \geq 1.119 ( 1.043 PP_K, 1.154 W_K )$$

o bien:

$$R_K \geq \frac{1.119}{0.878} ( 1.043 PP_K, 1.154 W_K )$$

y operando:

$$R_K \geq 1.329 PP_K + 1.471 W_K$$

Como puede observarse los valores obtenidos son congruentes con los patrocinados por la Norma MV-101 (respectivamente 1'33 y 1'5) por lo que en aras de la unificación se decidió proponer estos últimos como valores de ponderación.

En La Figura - 3.5, se indican para  $\beta = 3$ , los Coeficientes de Ponderación de la Resistencia, Viento y Peso Propio para distintos coeficientes de variación.

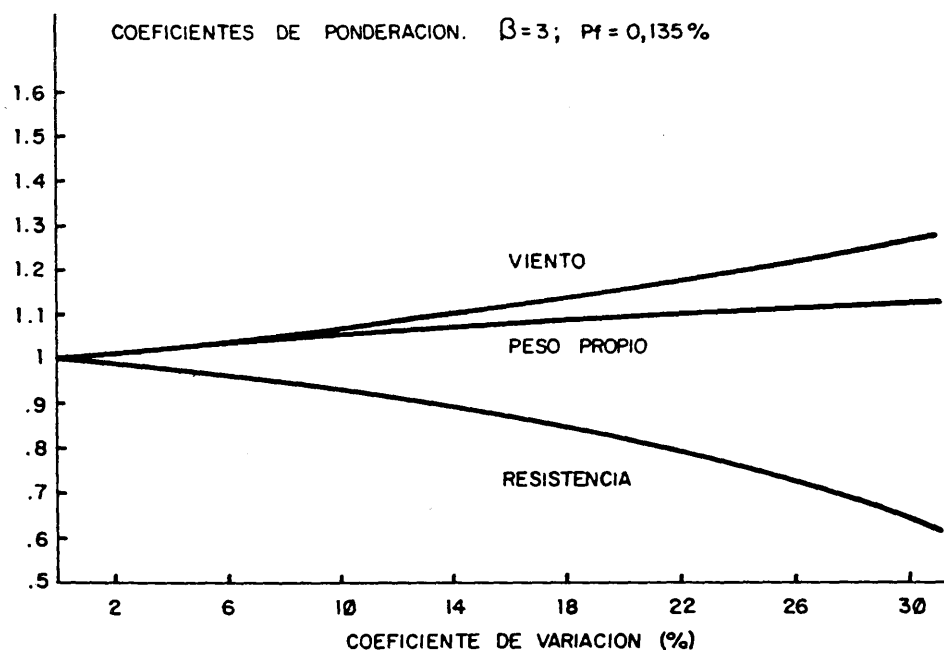


Figura 3.5

### 3.4. REFERENCIAS

- (3.1) A.H.S.ANG & W.H.TANG. "Probability Concepts in Engineering Planning and Design". Ed. John Wiley & Sons. 1984
- (3.2) ASCE. Journal of the Structural Division. " Eight LRFD Papers". Vol. 104, No. ST9. Sept. 1978



- (3.3) R.BEZ & M.A.HIRT. "Probability - Based Load Models of Highway Traffic". IABSE, pp. 37-42. 2/91
- (3.4) N.G. BUNNI. "Construction Insurance" Ed. Elsevier.1986
- (3.5) B.ELLINGWOOD, J.G.MACGREGOR, T.V. GALAMBOS & C.A.CORNEL. " Probability Based Load Criteria: Load Factors and Load Combinations ". ASCE, Vol. 108, nº ST5, PP. 978-997. May. 1982.
- (3.6) ELLINGWOOD, J.G.MACGREGOR, T.V. GALAMBOS & C.A.CORNELL " Probability Based Load Criteria: Load Factors and load Combinations ". ASCE. Journal of Structural Division, Vol. 108, nº ST5, PP. 978-997. May. 1982.
- (3.7) T.V.GALAMBOS, D.ROSOWSKY. "Duration of Load Effects in LRFD for Wood Construction". ASCE. Journal of Structural Division, Vol. 117, No. 2, pp. 584-599. Feb. 1991.
- (3.8) T.V.GALAMBOS, B.ELLINGWOOD, J.G. GALAMBOS & C.A.CORNELL. "Probability Based Load Criteria: Assesment of Current Design Practice" . ASCE. Journal of Structural Division , Vol. 108, nº ST5, pp. 959-977. May. 1982.
- (3.9) C.A.CORNELL. "A Probability-Based Structural Code". Journal of the American Concrete Institute. Vol. 66, No.12, pp. 974-985. 1969
- (3.10) T.V.GALAMBOS. "Developments in Modern Steel Design Standars". J. Construct. Steel Research 17, Ed. Elsevier, pp. 141-162. 1991.
- (3.11) S. GOMEZ LERA, C. HUERTA, y E. ALARCON "Recomendaciones para una posible Norma Española de Candelabros". Sociedad de Investigación Estudios y Experimentación. Madrid. Diciembre 1989.
- (3.12) S. GOMEZ LERA y E. ALARCON. "Sobre la comprobación por cálculo de las columnas de alumbrado". Montajes e Instalaciones, nº 232, pp. 143-149.
- (3.13) J.GOYET et A.BUREAU. " Sécurité Probabiliste des Structures: Evaluation de Coefficients Partiels de Sécurité pour l'elaboration des Nouveaux Reglements " Bureau Construction Metallique, nº 1-1990
- (3.14) A.M.HASOFER & N.C.LIND. "Exact and Invariant Second Moment Code Format". Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.100, pp. 111-121. 1979.
- (3.15) JCSS (Joint Committe on Structural Safety: CEB-CECM-CIB-FIP-IABSE-IASS-RILEM). "Proposal for a Code for the use of Reliability Methods in Structural Design". O.Ditlevsen, H.O. Madsen. 1989.
- (3.16) J.L.KENNEDY. "Limit States Design of Steel Structures in Canada". ASCE. Journal of Structural Engineering, Vol 110, nº 2, pp. 275-291. February, 1984.
- (3.17) H.O.MADSEN, S.KRENK & N.C.LIND. "Methods of Structural Safety". Ed. Prentice Hall. 1986.
- (3.18) R.E.MELCHERS. "Structural Reliability : Analysis and Prediction". Ed. Ellis Horwood. 1987.
- (3.19) A.H.PEYROT, M.E.CRISWEEL, M.D.FOLSE & J.P.AZNAVOUR. "Reliability Analysis of Wood Transmission Poles " Journal of the Structural Division, ASCE, Vol 108, nº ST9,pp. 1981-1994. September, 1982.
- (3.20) M.K. RAVINDRA, A.C. HEANY & N.C. LIND. "Probabilistic Evaluation of Safety Factors". Final Report, Symp. on Concepts of Safety of Structures and Methods of Design. IABSE. London, pp. 36-46. 1969.
- (3.21) C.G.SALMON & J.E.JOHNSON. "STEEL STRUCTURES: Design and Behavior. Emphasizing Load and Resistance Factor Design. Ed. Harper & Row. 1990.
- (3.22) P. THOFT-CHRISTENSEN & M.J.BAKER. "Structural Reliability Theory and Its Applications". Ed. Springer-Verlag. 1982.
- (3.23) E. TORROJA. "Instrucción HA-61 especial para Estructuras de Hormigón Armado". C.S.I.C. Madrid 1961.

## CAPÍTULO 4

### ESTUDIO DE NIVELES DE SEGURIDAD EN TUNELES

#### 4.1. INTRODUCCIÓN

Tanto el desarrollo minero como la mejora de las comunicaciones implican la perforación de túneles y galerías.

Durante mucho tiempo estas obras subterráneas han sido consideradas de alto e indefinible riesgo hasta el punto que, incluso actualmente, se siguen considerando obras de artesanía con definición "sobre la marcha". Ello quiere decir que tanto el coste como la seguridad quedan sometidas a la experiencia y juicios subjetivos de las personas encargadas de su construcción.

El desarrollo del Método Austriaco con su exigencia de control experimental de obras ha impulsado la aplicación de modelos numéricos informatizados y, en definitiva, la tecnificación de los trabajos.

El problema del margen de seguridad, sin embargo, sigue definiéndose de forma sumaria; a ello contribuyen los prejuicios citados más arriba, la complejidad que todo problema de interacción terreno-estructura conlleva y la dificultad aparente de los modelos matemáticos de fiabilidad que podrían ser aplicables.

El objetivo de este estudio consiste en aplicar la metodología de los métodos de Fiabilidad Estructural de nivel II al desarrollo de un formato de proyecto carga-resistencia que permita sistematizar los cálculos dentro de unos márgenes de seguridad prefijados en forma análoga a lo incluido en otras normas de construcción.

#### 4.2. DESCRIPCION FISICA DEL PROBLEMA

Entre los distintos campos de aplicación de la Ingeniería Civil, las obras subterráneas destacan por su complejidad y por el gran número de factores que influyen en su desarrollo; pero sobre todo por la ineludible consideración de una cuestión que para este tipo de construcciones es algo inherente a la propia naturaleza del problema : la interacción terreno- estructura.

En este sentido la decisión sobre el sistema de excavación del túnel influye notablemente sobre la forma de trabajo del terreno y la estructura.

Mientras que para secciones inferiores a 15 m<sup>2</sup> la excavación se suele efectuar a sección completa, para secciones mayores se han venido utilizando diferentes sistemas entre los que cabe destacar el Nuevo Método Austriaco (NATM : New Austrian Tunnelling Method).

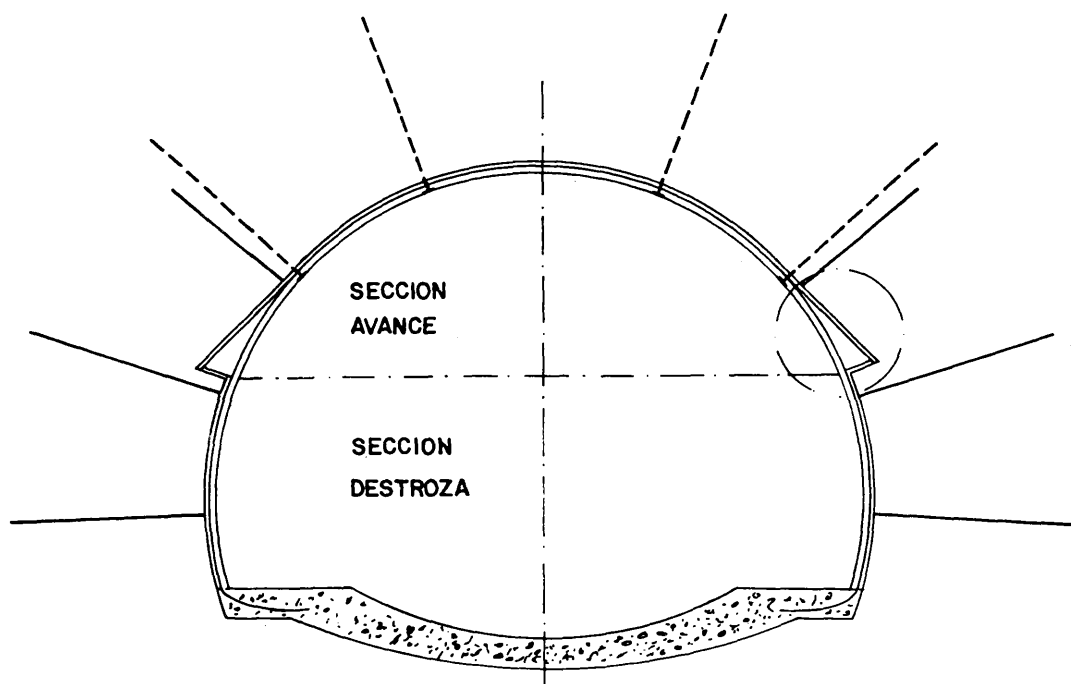


Figura 4.1

Este procedimiento, denominado así por su difusor Rabcewicz en 1963, Ref. (4.7), fue desarrollado entre los años 1957 y 1965; y se basa fundamentalmente en el aprovechamiento inteligente de la deformabilidad del terreno para conseguir una reducción en las estructuras de sostenimiento de los túneles. En otras palabras, se trata de explotar al máximo la capacidad del terreno de sostenerse a sí mismo.

A nivel teórico, la interpretación del fenómeno de interacción terreno - estructura constituye el fundamento sobre el que se basan los cálculos. Tarea que no resulta sencilla, ya que, a las incertidumbres habituales en este tipo de cálculos (vg. caracterización mecánica del terreno, definición de la geometría del modelo, etc.) se une el hecho de que la situación de carga en una sección del túnel evoluciona conforme va progresando el frente de la excavación. Esta variación de la carga sobre una sección depende fundamentalmente de dos factores:

- de la influencia tridimensional del proceso de avance del frente del túnel,
- y del carácter viscoso del terreno, que no reacciona de forma instantánea a un cambio en su estado de sollicitación.

La evolución en el estado tensión - deformación en una sección del terreno que rodea al túnel, podría describirse como sigue:

- a) Sobre una situación de tensiones iniciales se produce una descarga, que se inicia antes de la llegada del frente, debida a la deformación del terreno afectado por un arco longitudinal que salva la zona no sostenida. Durante esta Fase de Relajación, Figura -4.2.A, se producen deformaciones que no pueden ser registradas y que en el caso de algunos terrenos blandos pueden representar el porcentaje más importante de la convergencia total, Ut.

- b) En el otro extremo del arco de descarga, se encuentra la zona con la estructura del sostenimiento efectivo que reacciona con una determinada presión ante las nuevas convergencias. Estas últimas,  $U_1$ , varían con el tiempo debido a los dos factores anteriormente mencionados : la progresión del frente y el carácter diferido de los procesos de fractura y plastificación que se desarrollan en la masa de roca.

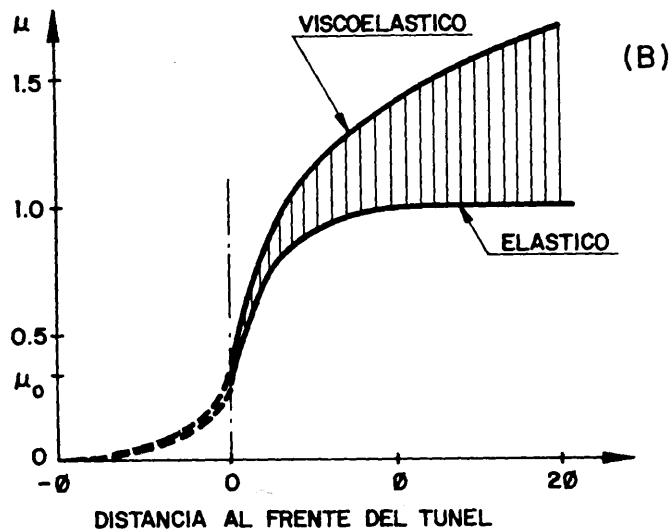
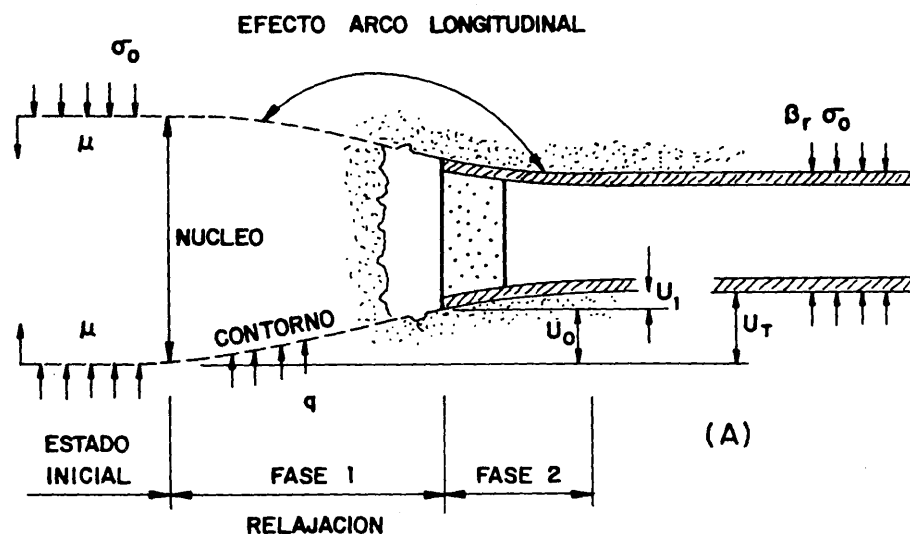


Figura 4.2

En la Figura 4.2.B, se representa la evolución de la convergencia en función de la distancia al frente de la perforación. En ella puede observarse como aumenta el tiempo de estabilización de la convergencia en la sección como consecuencia del comportamiento viscoelástico del terreno.

La deformación de relajación  $U_0$ , recoge las convergencias provocadas durante el tiempo que transcurre hasta que el sostenimiento resulta efectivo (puesta en obra, fraguado y endurecimiento en el caso de sostenimientos de hormigón) además de aquellas que se desarrollan antes de la llegada del frente de la perforación.

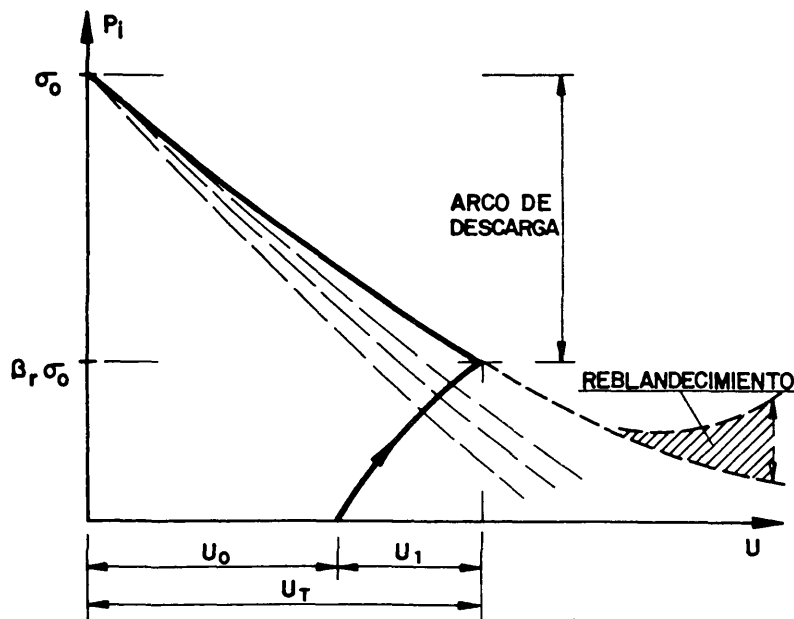


Figura 4.3

En la Figura 4.3, se presenta en función de la presión y el desplazamiento las curvas de comportamiento del terreno y la estructura del sostenimiento según el modelo de Rabcewicz. Las líneas de trazos indicadas en la Figura, y que cortan a la curva de comportamiento del sostenimiento, marcan el progreso de la zona de plastificación hacia el interior del macizo; produciéndose en el tiempo un aumento de la deformación hasta alcanzar en la curva límite el valor  $U_1$ , momento en el que se establece el régimen permanente.

A partir de esta interpretación del fenómeno básico del problema de interacción terreno-sostenimiento, puede observarse que en el establecimiento de la seguridad en una obra de estas características influyen tanto aquellos factores que determinan el comportamiento del terreno como los que afectan a la propia estructura.

#### 4.3. MODELO MATEMATICO DE CALCULO

Seleccionada e identificada la forma en que se comporta el sistema mecánico, el paso siguiente consiste en la adopción de un modelo matemático que posibilite el análisis del problema de interacción terreno-estructura planteado.

Para ello el efecto del túnel sobre el terreno se simula, siguiendo la teoría general de Rabcewicz, mediante un estado de deformación plana, en el que las secciones transversales están sometidas a una presión uniforme  $P_i$ , que inicialmente toma el valor  $P_0$ , y que a posteriori se reduce por efecto de la excavación al aumentar la convergencia,  $U$  del taladro. En la Figura 4.4, se indica la evolución de la citada convergencia (desplazamiento radial) frente a la presión  $P_i$ .

La disminución de la presión interna provoca, a partir de un determinado valor de la misma  $\sigma_p$ , una plastificación de la zona del terreno circundante al taladro, delimitada por un radio designado con el nombre de Radio de Plastificación,  $\rho$ , Figura 4.5.

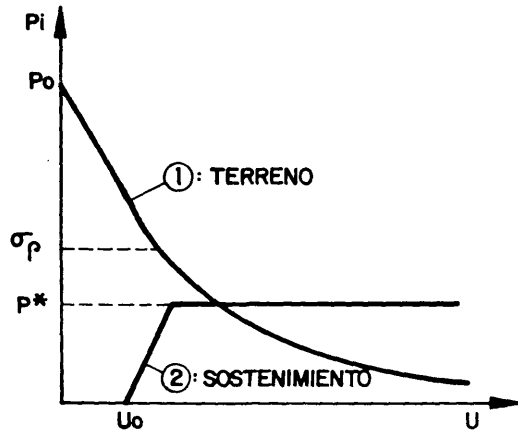


Figura 4.4

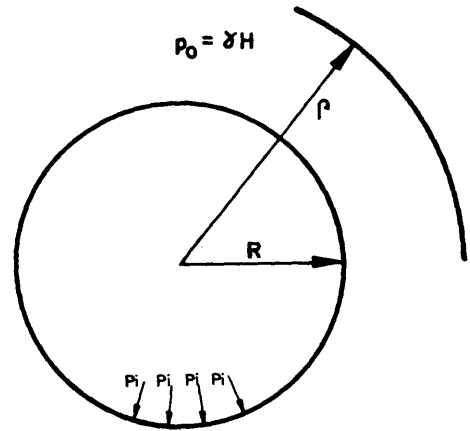


Figura 4.5

Entre las distintas alternativas existentes para formular el problema de la determinación de la curva  $P_i - U$ , la asumida en este trabajo corresponde a la adopción de un modelo elasto-plástico para simular el comportamiento del terreno; el modelo incorpora el criterio de plastificación de Mohr-Coulomb y una descripción completa del mismo puede encontrarse en un artículo publicado en 1984 por P. Fritz, Ref. (4.2).

En la citada referencia se demuestra que el Radio de Plastificación puede expresarse mediante la relación:

$$\rho = R \left[ \left( \sigma_\rho + \frac{\sigma_d}{m-1} \right) \frac{1}{\frac{\sigma_d}{m-1} + P_i} \right]^{\frac{1}{m-1}} \quad (4.1)$$

donde:

- $R$  es el radio el túnel supuesto circular
- $\sigma_\rho$  el valor de la presión uniforme  $P_i$ , a partir de la cual el terreno empieza a plastificarse. La citada presión, depende de la cohesión  $C$ , el ángulo de rozamiento interno,  $\phi$ , y de la presión inicial  $P_o = \gamma H$ , a través de la relación:

$$\sigma_\rho = \frac{2P_o - \sigma_d}{m-1} \quad (4.2)$$

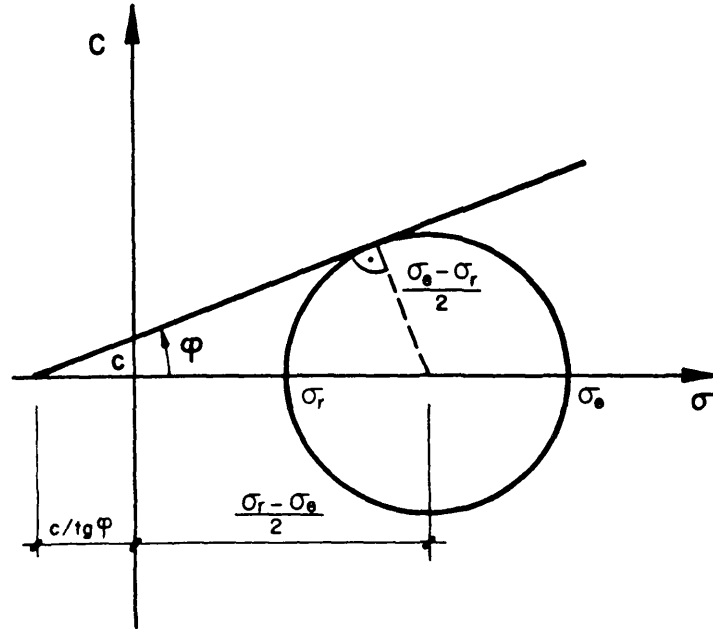
- $m$  y  $\sigma_d$  son parámetros característicos del terreno

$$m = \frac{1 + \sen \phi}{1 - \sen \phi} \quad (4.3)$$

$$\sigma_d = \frac{2C \sen \phi}{1 - \sen \phi} \quad (4.4)$$

en función de los cuales es posible expresar el criterio de plastificación de Mohr-Coulomb.

$$\sigma_\theta = m \sigma_r + \sigma_d$$



Con las consideraciones previas, aceptando la hipótesis de plasticidad asociada y suponiendo que el ángulo de rozamiento y la cohesión del terreno se mantienen al alcanzarse la plastificación; puede escribirse para el desplazamiento radial de los puntos situados en el contorno del túnel, siendo  $v_t$  el Coeficiente de Poisson y  $E_t$  el Modulo de Elasticidad del terreno.

#### ZONA ELASTICA

$$U_t = R \frac{1 + v_t}{E_t} (P_o - P_t) \quad (4.5)$$

#### ZONA PLASTICA

$$U_t = R \frac{1 + v_t}{E_t} \left[ k_2 \left( \frac{\rho}{R} \right)^{m+1} + k_1 \left( \frac{R}{\rho} \right)^{m-1} + k_3 \right] \quad (4.6)$$

siendo:

$$k_1 = \left( \sigma_p + \frac{\sigma_d}{m-1} \right) \left[ (1 - v_t) \frac{1 + m^2}{2m} - v_t \right] \quad (4.7)$$

$$k_2 = (1 - v_t) \frac{1+m}{2m} [\sigma_d + (m-1)\sigma_p]$$

$$k_3 = P_o - \sigma_p - k_1 - k_2$$

En la Figura 4.6, y para las características del terreno que se indican a continuación, se presentan las variaciones de  $\rho/R$  en función de la presión  $P_i$ , para distintos ángulos de rozamiento.

$$C = \text{Cohesión} = 2.2 \text{ kg/cm}^2$$

$$\gamma_T = \text{Peso específico} = 2.300 \text{ kg/cm}^2$$

$$\alpha_T = \text{Coeficiente Poisson} = 0.19$$

$$E = \text{Módulo de Elasticidad} = 3.35 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$$

$$H = \text{Profundidad excavación} = 100 \text{ m.}$$

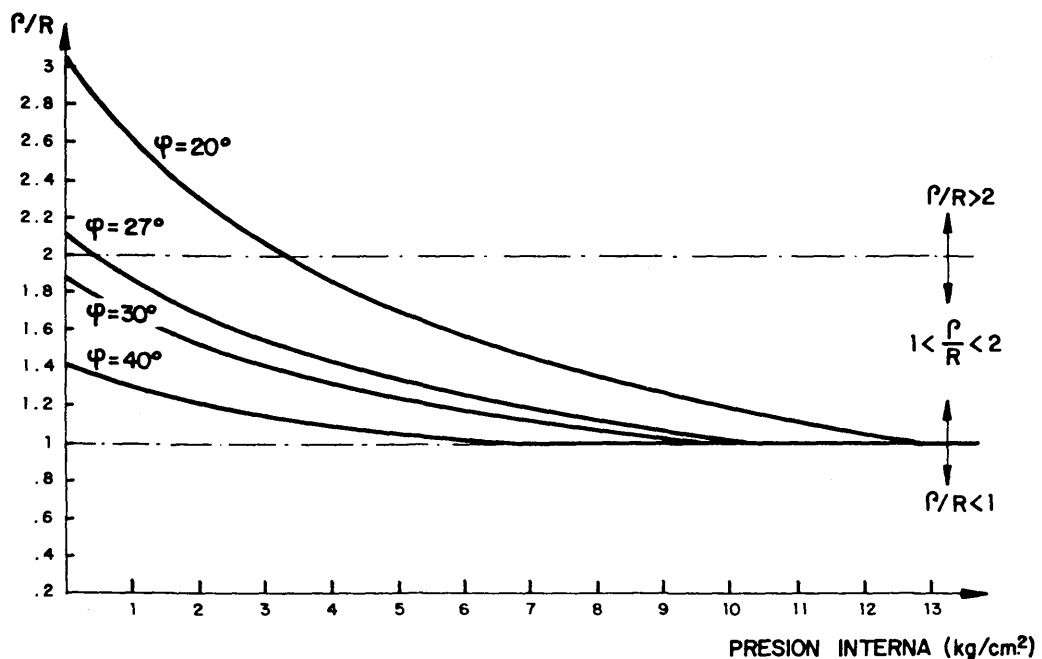


Figura 4.6

En dicha Figura puede observarse:

- Sea cual fuese el ángulo de rozamiento del terreno  $\phi$ , la relación  $\rho/R$  presenta una evolución decreciente con el aumento de  $P_i$  hasta que se alcanza una presión igual a  $\sigma_p$ , a partir de la cual el valor se iguala a la unidad (Zona Elástica).
- La zona de comportamiento elástico del terreno,  $\sigma_p < P_i < P_o$  como cabría esperar, es mayor cuanto mayor es el ángulo de rozamiento  $\phi$ .

En lo que al sostenimiento se refiere; se ha supuesto inicialmente un comportamiento elasto-plástico del material y que la sección transversal del mismo es un anillo circular de radio medio  $R$ , espesor  $t$ , módulo de Elasticidad  $E_s$  y sometido a la presión,  $P_i$ , ejercida por el terreno.

Bajo estas hipótesis y en la zona elástica, la deformación de la línea media será:

$$\epsilon_s = \frac{P_i R}{E_s t} \quad (4.8)$$



Por otra parte, y si se designa por  $U_0$  a la convergencia inicial (valor del desplazamiento radial del terreno al hacerse efectivo la estructura del sostenimiento), al ser:

$$\epsilon_s = \frac{U_s - U_0}{R} \quad (4.9)$$

se obtiene para el desplazamiento del sostenimiento en dirección radial:

$$U_s = U_0 + \frac{P_i R^2}{E_s t} \quad (4.10)$$

En la Figura 4.4, puede observarse el comportamiento elástico del sostenimiento hasta alcanzar una presión  $P^*$ :

$$P^* = \frac{\sigma_{s,lim} t}{R} \quad (4.11)$$

a partir de la cual se produce la plastificación.

La Tabla 4.1 recoge un resumen de las expresiones que caracterizan el comportamiento del sistema.

TABLA 4.1

| SOSTENIMIENTO                             | TERRENO   |
|---|---|
| $\epsilon_s = \frac{u_s - u_0}{R}$        | $P/R = \left[ \left( \sigma_p + \frac{\sigma_d}{m-1} \right) \frac{1}{\frac{\sigma_d}{m-1} + P_i} \right]^{1/m-1}$                |
| $u_s - u_0 = \frac{P_i R^2}{E_s \cdot t}$ | $m = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad \sigma_d = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$                         |
| $P^* = \frac{\sigma_{s,lim} \cdot t}{R}$  | $\sigma_p = \frac{2 P_0 - \sigma_d}{1 + m}$   |
|   | $v_t = R \frac{1 + N_t}{E_t} \left[ k_2 \left( \frac{P}{R} \right)^{m+1} + k_1 \left( \frac{R}{\rho} \right)^{m-1} + k_3 \right]$ |
|   | $k_1 = \left( \sigma_p + \frac{\sigma_d}{m-1} \right) \left[ (1 - v_t) \frac{1+m^2}{2m} - v_t \right]$                            |
|   | $k_2 = (1 - v_t) \frac{1+m}{2m} \left[ \sigma_d + (m-1) \sigma_p \right]$   |
|   | $k_3 = P_0 - \sigma_p - k_1 - k_2$  |

Por otra parte; el punto de equilibrio (Pe, Ue), del problema de interacción terreno-estructura planteado, se obtendrá al imponer la condición de compatibilidad de los desplazamiento entre el terreno y el sostenimiento, es decir:

$$U_s = U_t$$

así, para la zona plastificada del terreno, igualando las expresiones (4.6) y (4.10), se obtiene:

$$P_i = \frac{E_s t}{R^2} \left[ -U_o + R \frac{1 + \nu_t}{E_t} [(k_2 + k_1 \alpha^{-2m})^{\alpha^{m+1}} + k_3] \right] \quad (4.12)$$

donde

$$\alpha = \rho/R$$

Por último, la sustitución de (4.12) en (4.1) y una posterior agrupación de términos, conduce a:

$$A \alpha^{m-1} - B \alpha^{2m} - C = 0 \quad (4.13)$$

siendo:

$$A = U_o \frac{E_s t}{R^2} - \frac{\sigma_d}{m-1} - k_3 \frac{E_s t}{E_t R} (1 + \nu_t) \quad (4.14)$$

$$B = \frac{E_s t}{E_t R} (1 + \nu_t) k_2$$

$$C = \frac{E_s t}{E_t R} (1 + \nu_t) k_3 - \left( \sigma_p + \frac{\sigma_d}{m-1} \right)$$

la resolución de la ecuación (4.13) permite obtener en primera instancia el valor del radio de Plastificación que sustituido en (4.12) proporciona finalmente la presión,  $P_E$ , del punto de equilibrio.

Como puede observarse la determinación del punto de equilibrio implica la utilización de un proceso iterativo, que en este estudio se ha aplicado, no a la resolución de la ecuación exponencial anterior, sino directamente sobre las leyes de comportamiento del terreno y sostenimiento.

En la Figura 4.7, se indica el esquema general del procedimiento iterativo utilizado que ha servido de base para la elaboración de un programa de ordenador que permite determinar el punto de equilibrio y dibujar gráficos a partir de los cuales es posible analizar la influencia que los distintos parámetros tienen en el comportamiento del sistema.

En las Figuras 4.8, 4.9, 4.10 y 4.11, se presenta para un modulo de Elasticidad del terreno :

$$E_T = 3.35 \times 10^4 \text{ Kg/cm}^2$$

los distintos puntos de equilibrio (\*) obtenidos, para diferentes ángulos de rozamiento del terreno, al variar el módulo de elasticidad del sostenimiento.

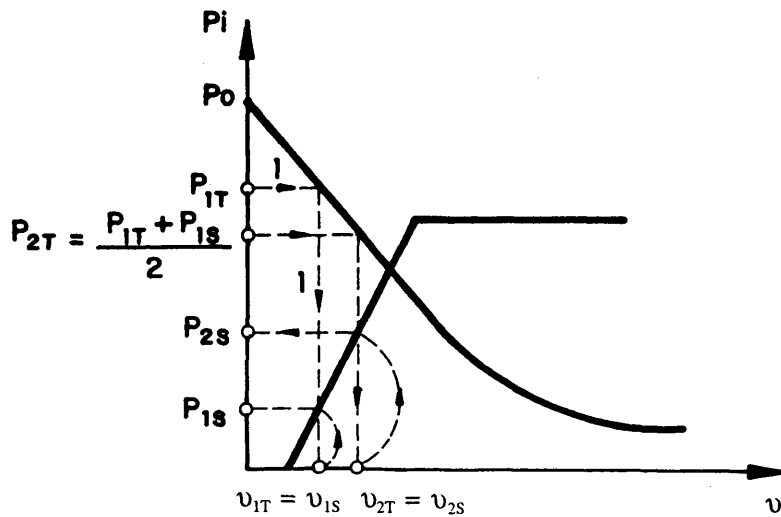


Figura 4.7

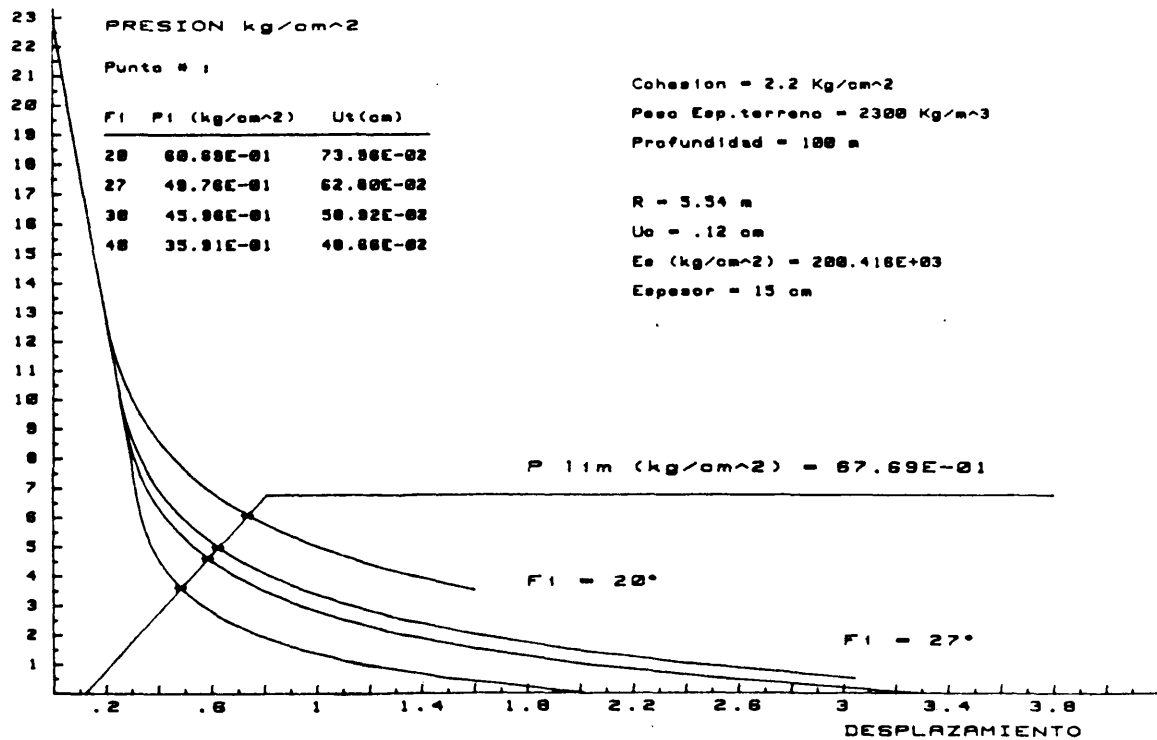


Figura 4.8

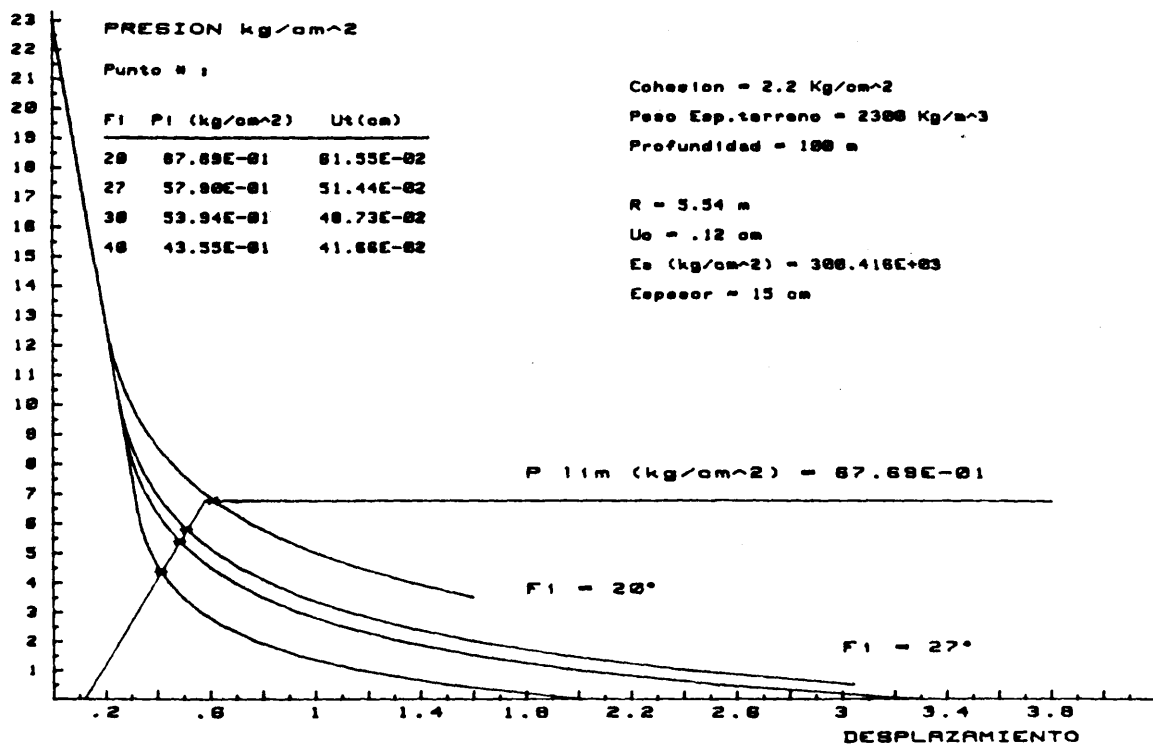


Figura 4.9

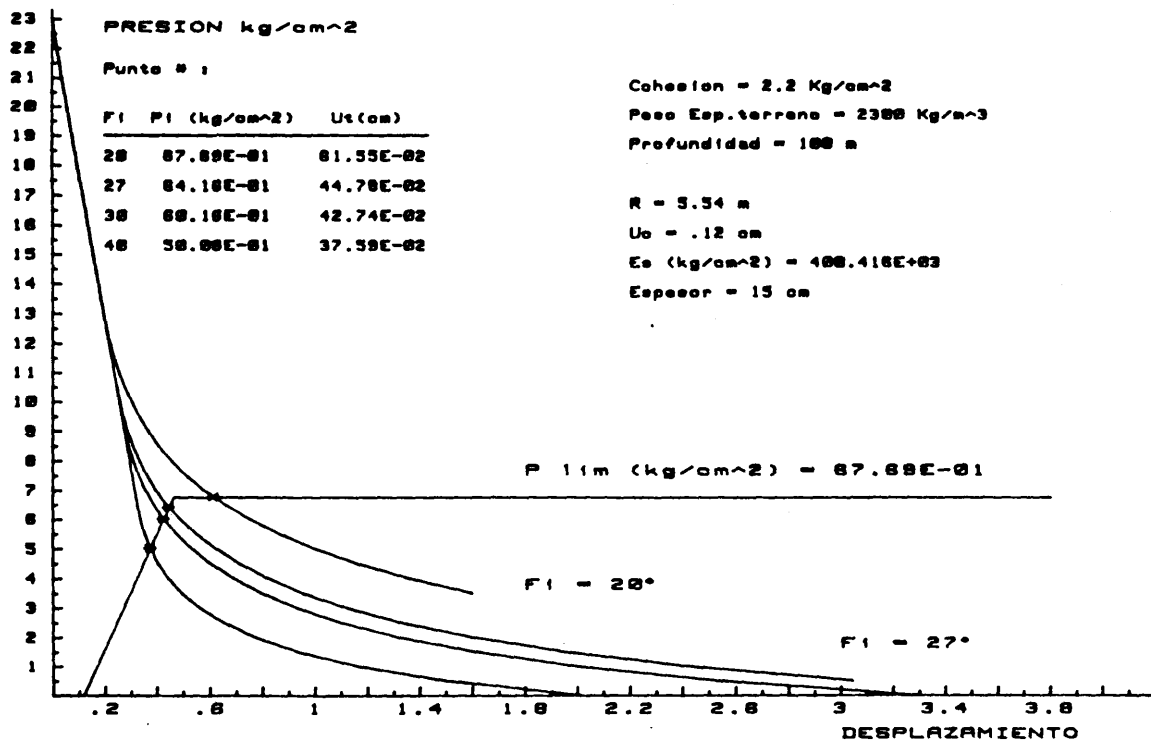


Figura 4.10

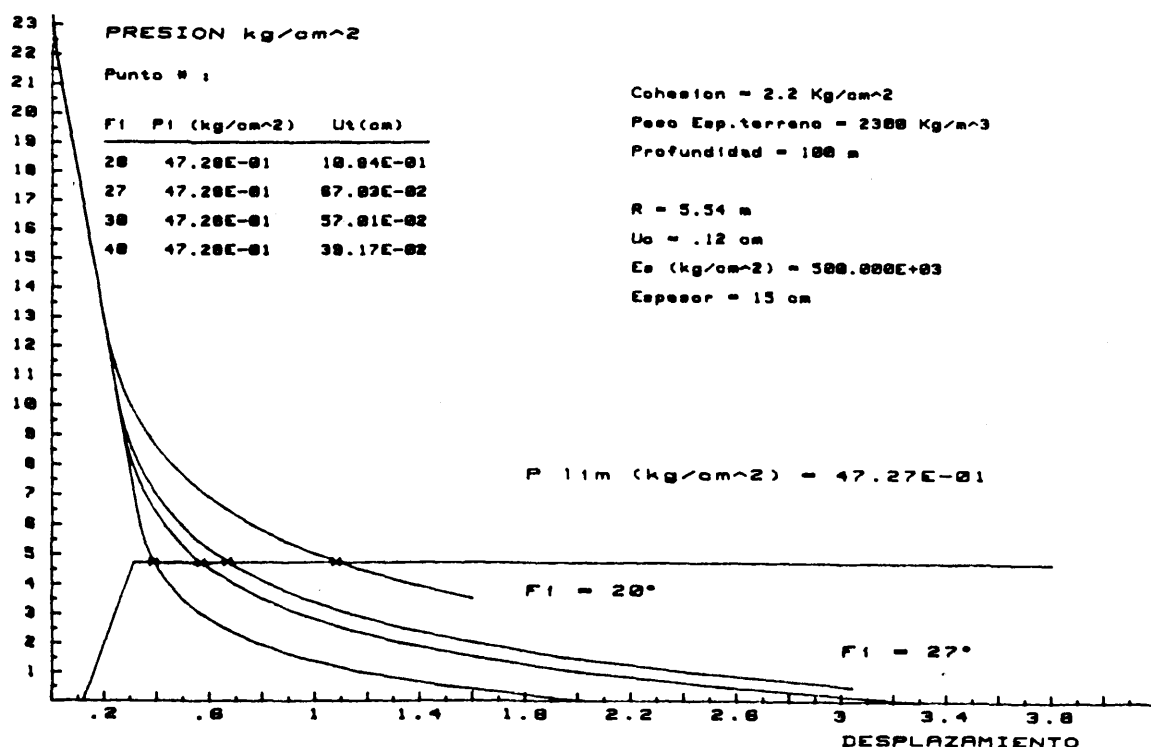


Figura 4.11

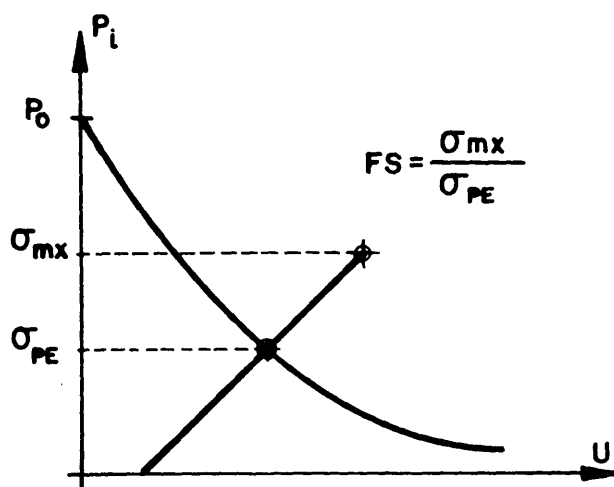
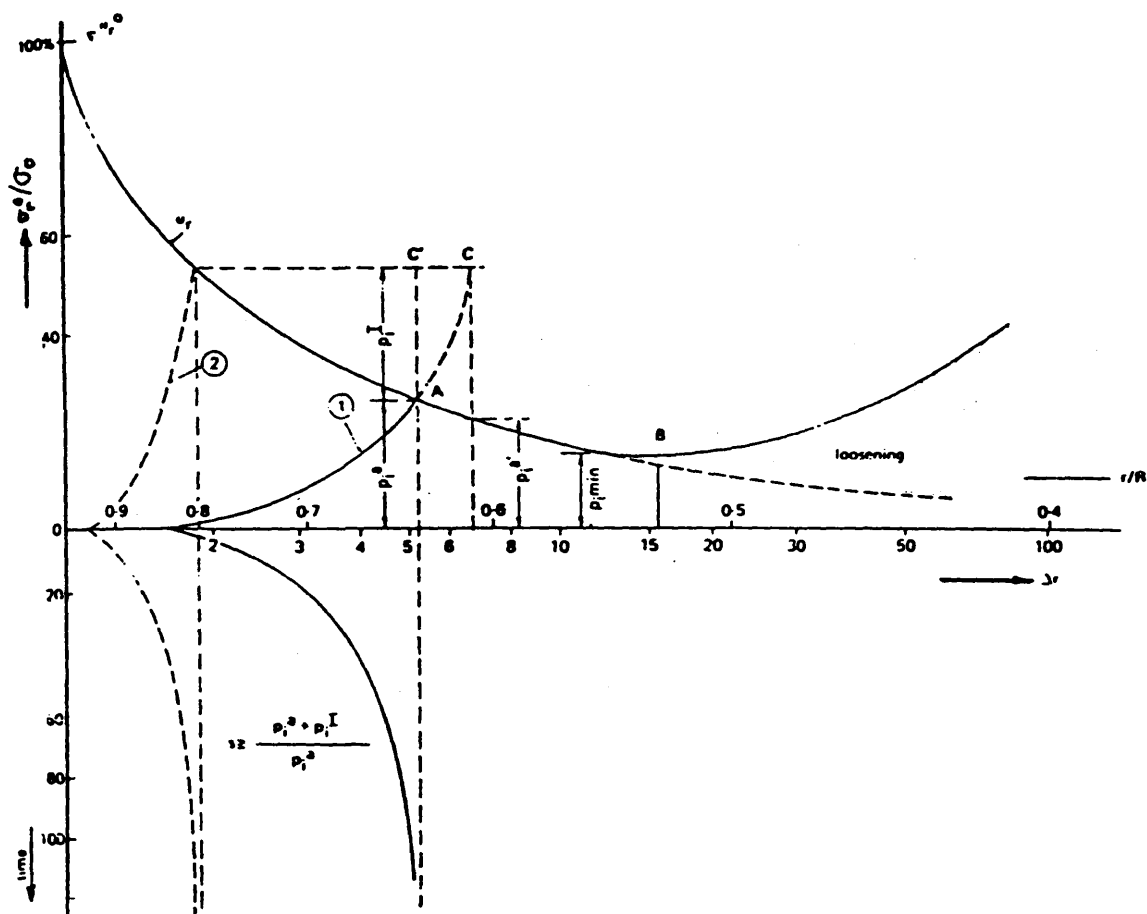
#### 4.4. ANALISIS DE LA SEGURIDAD

##### A) CONSIDERACIONES CLASICAS

Mientras que la aparición del Método Austriaco propició un intenso desarrollo de la investigación de leyes de comportamiento y modelos matemáticos a utilizar en el análisis de las estructuras de sostenimiento de túneles, el estudio sobre la introducción de la seguridad no ha sido, sin embargo, tan intenso limitándose a adoptar un único coeficiente, cuyo valor, por lo general, no se especifica claramente.

La Figura 4.12, tomada de un artículo de Rabcewicz, Ref.(4.13), pone de manifiesto que el difusor del Método Austriaco no considera en ningún momento la seguridad del sostenimiento, sino que el coeficiente de seguridad propuesto se refiere a la resistencia adicional provocada por la construcción del revestimiento, Ref.(4.3). La figura es aquívoca pues parece compararse la resistencia de un sistema más rígido (sostenimiento + revestimiento), curva 2, con otro más flexible (sólo sostenimiento), curva 1. Ahora bien, tan pronto como este último ha sido construido y se alcanza la posición de estabilización, el incremento de presiones necesario para hacer trabajar el revestimiento implicaría un cambio en la curva característica del terreno que, desde luego, no es contemplada explícitamente en la definición del coeficiente de seguridad propuesto.

La misma falta de estudio sobre la cuantificación del nivel de seguridad puede observarse en publicaciones recientes y de amplio uso en nuestro país, Programa SOSTENIM, Ref.(4.6), Figura 4.13; en esta referencia la seguridad se considera cubierta por el margen existente entre la tensión máxima del Sostenimiento y la correspondiente al punto de equilibrio.



Obsérvese que las diferencias entre este coeficiente de seguridad y el propuesto por Rabcewicz radica en la adopción de una ley de comportamiento lineal para el sostenimiento y en la justificación del coeficiente por el movimiento de la curva característica debido a las propiedades viscosas del terreno.

En ninguna de las dos publicaciones referenciadas se analizan valores aconsejables para estos coeficientes ni tampoco se dan criterios racionales para su establecimiento; dejándose una vez más en las subjetivas manos del proyectista la forma en que ha de cuantificarse la aleatoriedad de las cargas y de las propiedades del material.

## B) ESTADOS LIMITES

Siguiendo la pauta de las normativas actuales, la ITA (International Tunnelling Association), adoptó en 1988, para el proyecto de las estructuras de sostenimiento de túneles, la filosofía de cálculo por Estados Límites; señalando en este sentido que la puesta fuera de servicio de este tipo de obras subterráneas, se produciría en el caso de ocurrencia de alguna de las siguientes situaciones :

- Colapso de la estructura producido por inestabilidad global de la misma.
- Colapso de la estructura producido por agotamiento de su capacidad resistente.
- Agotamiento parcial de la capacidad resistente de la estructura que, obliga a realizar reparaciones locales.
- Daños producidos por fallos en la aplicación del procedimiento constructivo.
- Aparición de deformaciones inaceptables en la estructura.
- Pérdida de impermeabilidad de la estructura.
- Insuficiencia en la durabilidad de la estructura para el período de vida útil considerado en el proyecto.

Como puede observarse, esta relación no discrimina entre Estados Límites Ultimos y de Servicio; por otra parte, no indica a qué nivel ( estructura, sección, etc.) debe ser estudiado cada uno de estos estados.

Tomando como punto de referencia las directrices expuestas previamente, el presente estudio se ha realizado en base a la consideración de aquellos Estados Límites que pueden ser reflejados por el modelo de cálculo de Rabcewicz. En este sentido, los Estados Límites considerados han sido los siguientes:

### 1. Estado límite último de agotamiento de la capacidad resistente del terreno.

Se estudiará a nivel de sección del conjunto terreno-túnel, y vendrá definido por la formación de una corona de terreno plastificado alrededor del túnel, con una profundidad excesiva. Con ello se pretende eliminar el riesgo de rotura inestable que responde a una idea intuitiva que no ha sido posible justificar mediante ningún modelo matemático.

El valor límite para el radio de plastificación se suele fijar en el doble del radio del túnel. Estimándose que, en general, por encima de este valor se puede entrar en una situación en la que se produzca la disgregación del medio plastificado. En este estudio se posibilita la adopción de distintos valores, designando a la variable con el nombre de INDICE DE PLASTIFICACION.

$$\rho \leq 2R$$

este criterio que es puramente convencional; está, sin embargo, implícito en la mayoría de los proyectos y construcciones que se desarrollan en la práctica.

### 2. Estado límite de agotamiento de la estructura de sostenimiento.

Se estudia a nivel de sección del arco resistente. Viene definido por la superación de la capacidad portante del sostenimiento.

$$\varepsilon_s \leq \varepsilon_{s,lim}$$

### 3. Estado límite de servicio de deformación excesiva del sostenimiento.

Se estudia a nivel de sección del túnel; y se produciría como consecuencia de una convergencia que superase un valor límite prefijado en cada caso según criterios prácticos de utilización.

$$U_s - U_o \leq U_{s,lim}$$

## C) APLICACION DE LOS METODOS DE NIVEL II

En la línea marcada por los dos procedimientos expuestos en el capítulo 2, y en base al modelo matemático de cálculo adoptado en el apartado anterior, se han elaborado sendos programas de ordenador orientados a la determinación de la Fiabilidad de las estructuras de sostenimiento de túneles.

Un paso previo a una descripción somera de los mismos; implica, en primer lugar, la elección de las Funciones de Fallo que determinan el incumplimiento de los tres Estados Límites considerados; en este sentido, y si se designa por  $FF_i$  a la Función de Fallo correspondiente al Estado Límite  $i$ , se tendrá:

### 1. AGOTAMIENTO DE LA CAPACIDAD RESISTENTE DEL TERRENO

$$EL_1: \rho \leq 2R$$

$$FF_1 = 2 - (\rho/R)$$

### 2. AGOTAMIENTO DE LA ESTRUCTURA DEL SOSTENIMIENTO

$$EL_2: e_s \leq e_{s,lim}$$

$$FF_2 = e_{s,lim} - e_s$$

### 3. CONVERGENCIA EXCESIVA

$$EL_3: U_s - U_o \leq U_{s,lim}$$

$$FF_3 = U_{s,lim} - (U_s - U_o)$$

En lo que a las Variables Básicas Estadísticas se refiere, se han considerado como tales:

— Para la definición del TERRENO en el que se realiza la excavación:

- 1 :  $E_T$  : Módulo de Elasticidad del terreno
- 2 :  $\nu_t$  : Coeficiente de Poisson



- 3 :  $\gamma_t$  : Peso Específico
- 4 :  $H_t$  : Profundidad a la que se encuentra la excavación
- 5 :  $C_t$  : Cohesión
- 6 :  $\omega_t$  : Angulo de Rozamiento

— y en la estructura de SOSTENIMIENTO:

- 7 :  $u_o$  : Convergencia Inicial
- 8 :  $f_o$  : Resistencia del Hormigón
- 9 :  $t$  : Espesor de la capa de hormigón del sostenimiento
- 10 :  $R$  : Radio de la excavación
- 11 :  $\omega_s$  : Cuantía geométrica de las armaduras en el hormigón
- 12 :  $\omega_c$  : Sección unitaria de acero en cerchas

Por otra parte, cabe indicar, que para la definición del comportamiento del sostenimiento, se han tenido en cuenta todos los elementos que le caracterizan :

- Hormigón proyectado.
- Acero de alta resistencia en armaduras.
- Acero en los perfiles de las cerchas.

Como diagrama de cálculo del Hormigón, se ha adoptado el propuesto por el Eurocódigo - 2, que coincide sensiblemente con el de la Instrucción EH-88 para estados de no agotamiento; este diagrama es del tipo parábola-rectángulo, con las características generales indicadas en la Figura 4.14:

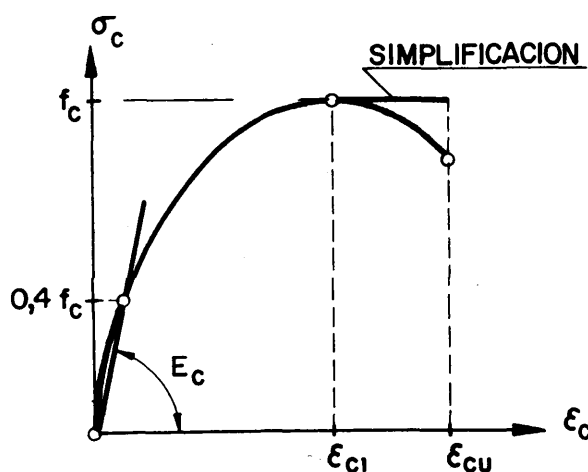


Figura 4.14

donde:

$$\epsilon_{c1} = 0.0020 \text{ (rotura del hormigón en compresión simple)}$$

$$\epsilon_{cu} = 0.0035 \text{ (rotura del hormigón en flexión)}$$

viniendo definida la rama parabólica por la expresión:

$$\sigma_c = \frac{1}{1 + \phi} \frac{1.1 \times 9.5 \times \left[ \frac{f_c}{10} + 8 \right]^{1/3} \times 10^4 \times e_c - f_c \times \left( \frac{e_c}{0.002} \right)^2 \times \mu}{1 + 1.1 \times 9.5 \times \left[ \frac{f_c}{10} + 8 \right]^{1/3} \times \frac{10^4 e_c}{f_c \mu} - 2 \frac{e_c}{0.002}}$$

siendo:

$F_c$  = Resistencia media del hormigón.

$\phi$  = coeficiente de fluencia.

$\mu$  = coeficiente de fatiga.

Respecto al Acero, su ley de comportamiento se ha supuesto modelizada conforme al diagrama de la Figura 4.15:

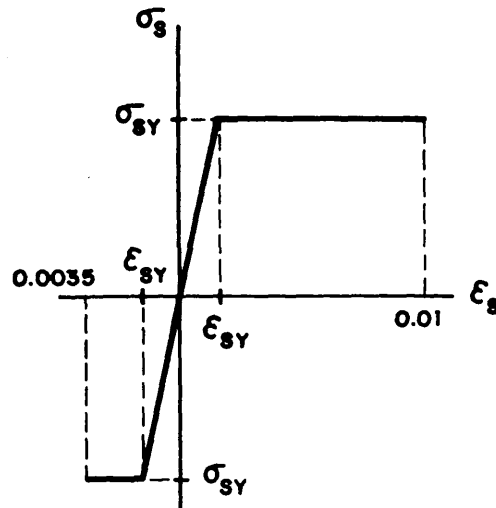


Figura 4.15

donde:

$$E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$\sigma_s^Y$  = límite elástico del acero:

$$\sigma_s^Y = 2.600 \text{ kg/cm}^2 \text{ (acero A-42, cerchas).}$$

$\epsilon_s^Y$  = deformación correspondiente al límite elástico:

$$\epsilon_s^Y = 0.0012 \text{ (acero A-42, cerchas)}$$

$$\epsilon_s^Y = 0.0020 \text{ (aceros, AEH)}$$

La Tabla 4.2, recoge los valores nominales de las Variables Básicas para distintos tipos de terreno (A, B, C, D, E). En la Tabla 4.3 se indican valores orientativos de los Coeficientes de Variación (%), y en la Tabla 4.4, se reflejan los valores estimados para los coeficientes de correlación entre las distintas variables.

TABLA 4.2

|            | A      | B      | C      | D      | E     |
|------------|--------|--------|--------|--------|-------|
| $E_t$      | 2.E4   | 4.E4   | 5.E4   | 1.E5   | 2.5E5 |
| $v_t$      | 0.18   | 0.19   | 0.19   | 0.24   | 0.27  |
| $\gamma_t$ | 2320   | 2330   | 2340   | 2360   | 2400  |
| H          | 150    | 200    | 200    | 350    | 350   |
| c          | 0.676  | 1.44   | 5.77   | 22     | 61    |
| $\varphi$  | 28     | 29     | 30     | 32     | 33    |
| $u_0$      | 30     | 30     | 15     | 5      | 5     |
| $f_c$      | 311    | 311    | 311    | 311    | 311   |
| t          | 25     | 20     | 15     | 10     | 5     |
| R          | 5.5    | 5.5    | 5.5    | 5.5    | 5.5   |
| $w_s$      | 1.5E-3 | 1.9E-3 | 2.5E-3 | 1.9E-3 | -     |
| $w_c$      | 1.4E-2 | 0.7E-2 | 7.E-3  | -      | -     |

TABLA 4.3

|            | A  | B  | C  | D  | E  |
|------------|----|----|----|----|----|
| $E_t$      | 30 | 30 | 35 | 35 | 35 |
| $v_t$      | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| $\gamma_t$ | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  |
| H          | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| c          | 40 | 40 | 40 | 40 | 40 |
| $\varphi$  | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 |
| $u_0$      | 40 | 40 | 40 | 40 | 40 |
| $f_c$      | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| t          | 25 | 25 | 25 | 25 | 25 |
| R          | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  |
| $w_s$      | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| c          | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 |

TABLA 4.4

|               | $E_t$        | $v_t$ | $\gamma_t$ | $H_t$      | $c_t$      | $\varphi_t$ | $u_0$      | $f_c$      | $t$        | $R$ | $w_s$ | $w_c$ |
|---------------|--------------|-------|------------|------------|------------|-------------|------------|------------|------------|-----|-------|-------|
| $E_t$         | 1            |       |            |            |            |             |            |            |            |     |       |       |
| $v_t$         | 0            | 1     |            |            |            |             |            |            |            |     |       |       |
| $\gamma_t$    | 0            | 0     | 1          |            |            |             |            |            |            |     |       |       |
| $H_t$         | 0.1<br>0.3   | 0     | 0          | 1          |            |             |            |            |            |     |       |       |
| $c_t$<br>0,00 | 0.5<br>0.7   | 0     | .01<br>.03 | 0.1<br>0.3 | 1          |             |            |            |            |     |       |       |
| $\varphi_t$   | 0.5<br>0.7   | 0     | 0          | 0.1<br>0.3 | 0.3<br>0.5 | 1           |            |            |            |     |       |       |
| $u_0$         | -0.1<br>-0.3 | 0     | 0          | 0.1<br>0.3 | 0          | 0           | 1          |            |            |     |       |       |
| $f_c$         | 0            | 0     | 0          | 0          | 0          | 0           | 0.1<br>0.3 | 1          |            |     |       |       |
| $t$           | 0            | 0     | 0          | 0          | 0          | 0           | 0          | -.1<br>-.3 | 1          |     |       |       |
| $R$           | 0            | 0     | 0          | 0          | 0          | 0           | 0          | 0          | 0          | 1   |       |       |
| $w_s$         | 0            | 0     | 0          | 0          | 0          | 0           | 0          | 0          | 0.1<br>0.3 | 0   | 1     |       |
| $w_c$         | 0            | 0     | 0          | 0          | 0          | 0           | 0          | 0          | 0          | 0   | 0.5   | 1     |

Se indica a continuación el resultado de un ejemplo realizado con el programa elaborado en base al Método de las Estimaciones Puntuales. Es importante observar que mientras el programa SOSTENIM proporciona un Coeficiente de Seguridad de 1.3, un análisis de la Fiabilidad del Sistema predice para el Estado Límite de Agotamiento de la Estructura una Probabilidad de Fallo del 36 %.

| DATOS DE CONTROL DEL PROCESO |    |
|------------------------------|----|
| N.º de Variables Básicas     | 12 |
| N.º de Estados Límite        | 3  |

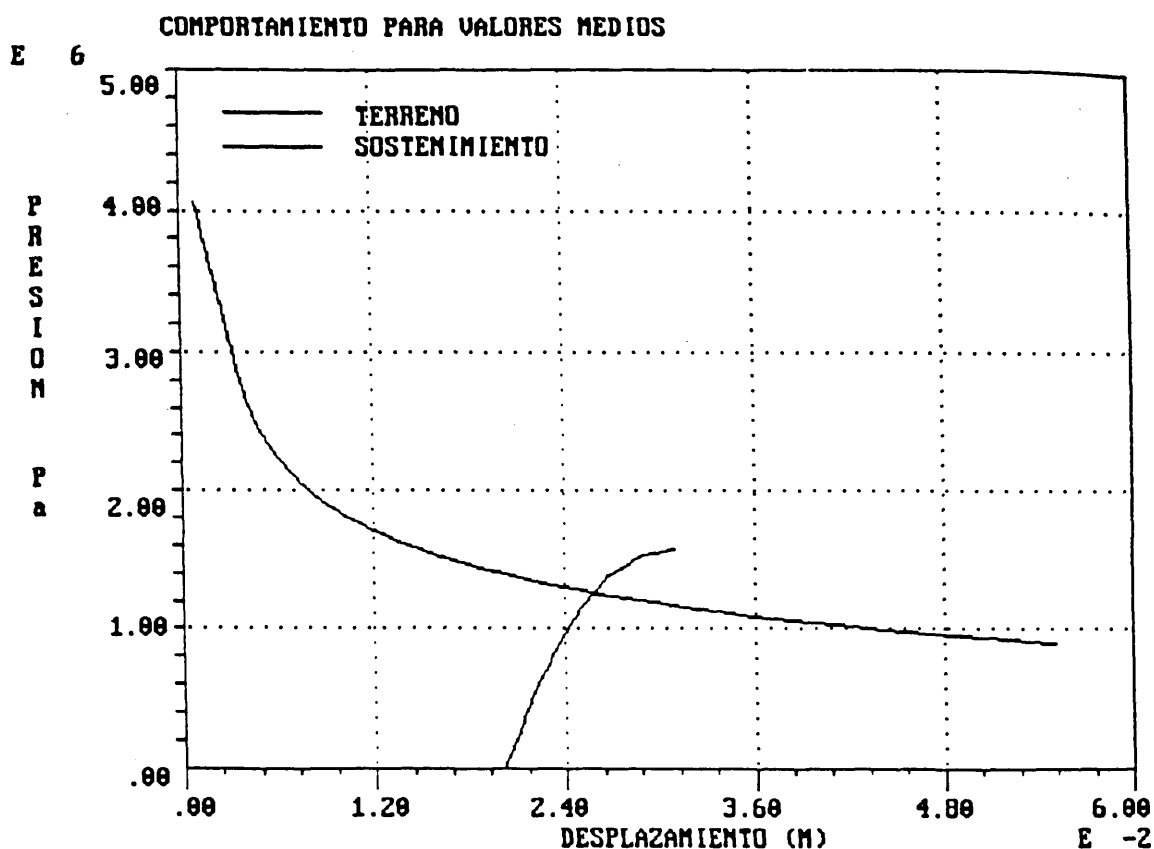
| DATOS GENERALES                             |              |
|---|--------------|
| Módulo de elasticidad del acero (Pa)        | 2.0601E + 11 |
| Límite elástico del acero en cerchas (Pa)   | 2.5506E + 8  |
| Límite elástico del acero en armaduras (Pa) | 5.0031E + 08 |
| Coeficiente de fluencia del hormigón        | 0            |
| Coeficiente de fatiga del hormigón          | 1            |

| DATOS DE DEFINICIÓN DE LOS ESTADOS LÍMITES           |       |
|--|-------|
| Índice de plastificación del terreno                 | 2     |
| Deformación rotura hormigón del sostenimiento        | 0.002 |
| Desplazamiento radial límite en el sostenimiento (m) | .03   |

| DATOS DE CARACTERIZACIÓN DE LAS VARIABLES DEL TERRENO |              |                          |
|---|--------------|--------------------------|
| Variable  | Valor medio  | Coefficiente variación % |
| 1. Mod. elasticidad (Pa)                              | 31.392E + 08 | 30                       |
| 2. Coef. Poisson                                      | 20.000E — 02 | 10                       |
| 3. Peso específico (N/m <sup>3</sup> )                | 22.563E + 03 | 5                        |
| 4. Prof. excavación (m)                               | 20.000E + 01 | 5                        |
| 5. Cohesión (Pa)                                      | 15.009E + 04 | 40                       |
| 6. Ángulo rozamiento (°)                              | 20.000E + 00 | 17                       |

| DATOS DE CARACTERIZACIÓN DE LAS VARIABLES DEL SOSTENIMIENTO |               |                          |
|---|---------------|--------------------------|
| Variable  | Valor medio   | Coefficiente variación % |
| 7. Convergencia inicial (m)                                 | 20.000E — 03  | 40                       |
| 8. Resistencia hormigón (Pa)                                | 30.509E + 06  | 15                       |
| 9. Espesor (m)  | 25.000E — 02  | 25                       |
| 10. Radio de la excavación (m)                              | 55.000E — 01  | 5                        |
| 11. Cuantía geométrica de armaduras                         | 15.000E — 04  | 1                        |
| 12. Sección acero cerchas (m <sup>2</sup> /m)               | 34.6000E — 04 | 20                       |

| PUNTO DE PARTIDA: VALORES MEDIOS DE LAS VARIABLES |                               |
|---|-------------------------------|
| Presión   | 126065E + 07 N/m <sup>2</sup> |
| Desplazamiento terreno                            | 258180E — 01 m                |
| Desplazamiento sostenimiento                      | 581799E — 02 m                |
| Deformación sostenimiento                         | 105782E — 02                  |
| Índice plastificante                              | 188875E + 01                  |



| RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE FIABILIDAD |                              |                                     |                      |                |
|---------------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|----------------------|----------------|
| Estado límite                         | Valor medio<br>función fallo | Desviación<br>tipo<br>función fallo | Índice<br>fiabilidad | Prob.<br>fallo |
| 1. Agotamiento terreno                | .8247E — 01                  | .1962E + 00                         | .4203E + 00          | .3371E + 00    |
| 2. Agotamiento estructura             | .4142E — 03                  | .1166E — 02                         | .3553E + 00          | .3612E + 00    |
| 3. Exc. desplazamiento rad.           | .2128E — 01                  | .6412E — 02                         | .3318E + 01          | .4527E — 03    |

#### 4.5. CARACTERIZACION DE VARIABLES

En este apartado se pretende:

- 1.º Caracterizar el comportamiento de las Variables Básicas del problema que controlan la respuesta del sistema; dicho de otro modo, se busca identificar que variables se comportan como carga y cuales como resistencia en los distintos Estados Límites.
- 2.º Realizar un análisis comparativo de los niveles de seguridad obtenidos por métodos deterministas y probabilistas.
- 3.º Estudiar el grado de influencia de la incertidumbre de las variables en los niveles de seguridad.
- 4.º Analizar qué Estados Límites son mas desfavorables.

Para ello, con ayuda del programa de ordenador elaborado en base al Método de las Estimaciones Puntuales, y considerando como variables básicas, las doce que se relacionan en la TABLA-A, se han analizado una serie de casos que corresponden al estudio de la variación de la respuesta del sistema al modificar los valores medios y coeficientes de variación de las siete variables siguientes:

## TERRENO

- Módulo de Elasticidad.
- Peso Específico.
- Cohesión.
- Angulo de Rozamiento.

## SOSTENIMIENTO

- Convergencia Inicial.
- Resistencia del hormigón.
- Espesor.

Los valores máximos se han mantenido constantes para todos los casos estudiados y son los presentados en la Tabla B.

TABLA A

| TERRENO  | V. medio | V % |
|--|----------|-----|
| 1 : Módulo de Elasticidad (Kg/cm <sup>2</sup> )    | 33.500   | 20  |
| 2 : Coeficiente de Poisson                         | 0,19     | —   |
| 3 : Peso Específico (kg/cm <sup>3</sup> )          | 0,0023   | 20  |
| 4 : Profundidad (cm)                               | 10.000   | —   |
| 5 : Cohesión (kg/cm <sup>2</sup> )                 | 2.2      | 20  |
| 6 : Angulo de Rozamiento (°)                       | 27       | 20  |
| SOSTENIMIENTO                                      | V. medio | V % |
| 7 : Convergencia Inicial                           | 0,5      | 20  |
| 8 : Resistencia del Hormigón (kg/cm <sup>2</sup> ) | 250      | 20  |
| 9 : Espesor (cm)                                   | 20       | 15  |
| 10 : Radio (cm)                                    | 5.500    | —   |
| 11 : Cuantía de las armaduras                      | 0,002    | —   |
| 12 : Cuantía de las cerchas                        | 0,0085   | —   |

TABLA B

III

| SOSTENIMIENTO                               |           |
|---|-----------|
| Desplazamiento (cm)                         | 2         |
| Deformación                                 | 0,002     |
| TERRENO                                     |           |
| Indice de Plastificación                    | 2         |
| ACERO                                       |           |
| Tensión (kg/cm <sup>2</sup> )               | 2.600     |
| Módulo de Elasticidad (kg/cm <sup>2</sup> ) | 2.100.000 |
| HORMIGON                                    |           |
| Coefficiente de Fluencia                    | 0         |
| Coefficiente de Fatiga                      | 1         |

En lo que se refiere a la forma de evaluar la seguridad, se han escogido como indicadores de la misma, el Índice de Fiabilidad  $\beta = \mu_{FF} / \sigma_{FF}$ , y el tradicional Coeficiente de Seguridad FS, definido para los tres Estados Límites, considerados inicialmente como más restrictivos, en la forma siguiente:

#### I. AGOTAMIENTO DE LA CAPACIDAD RESISTENTE DEL TERRENO (RADIO DE PLASTIFICACION)

$$\text{Factor de Seguridad: } FS = \frac{2}{(\rho/R)_m}$$

$$\text{Función de Fallo: } FF = 2 - \rho/R$$

#### II. CONVERGENCIA EXCESIVA DEL SOSTENIMIENTO (DESPLAZAMIENTO)

$$\text{Factor de Seguridad: } FS = \frac{U_{mx}}{(U_s - U_o)_m}$$

$$\text{Función de Fallo: } FF = U_{mx} - (U_s - U_o)$$



### III. AGOTAMIENTO DE LA ESTRUCTURA DEL SOSTENIMIENTO (DEFORMACION)

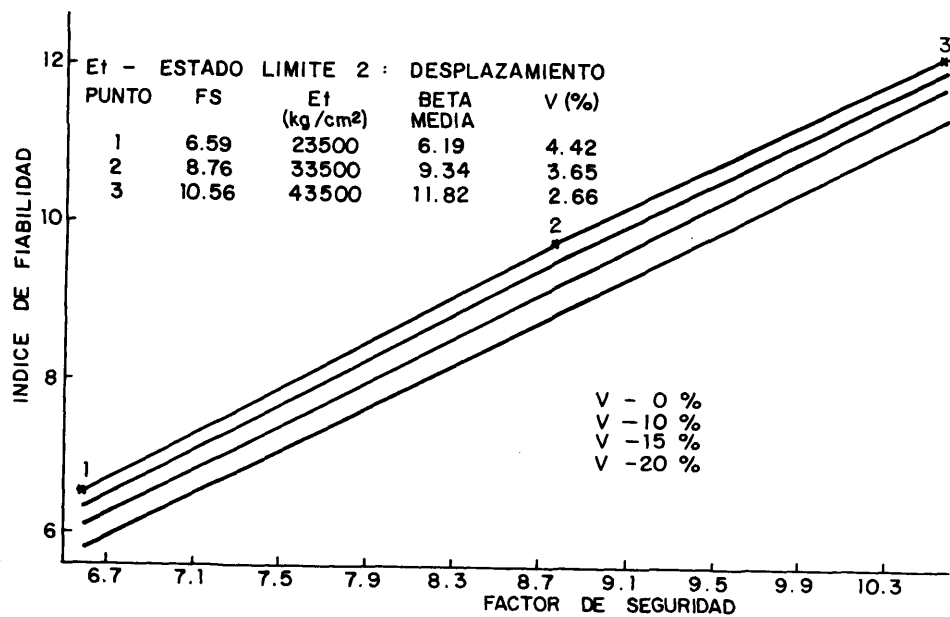
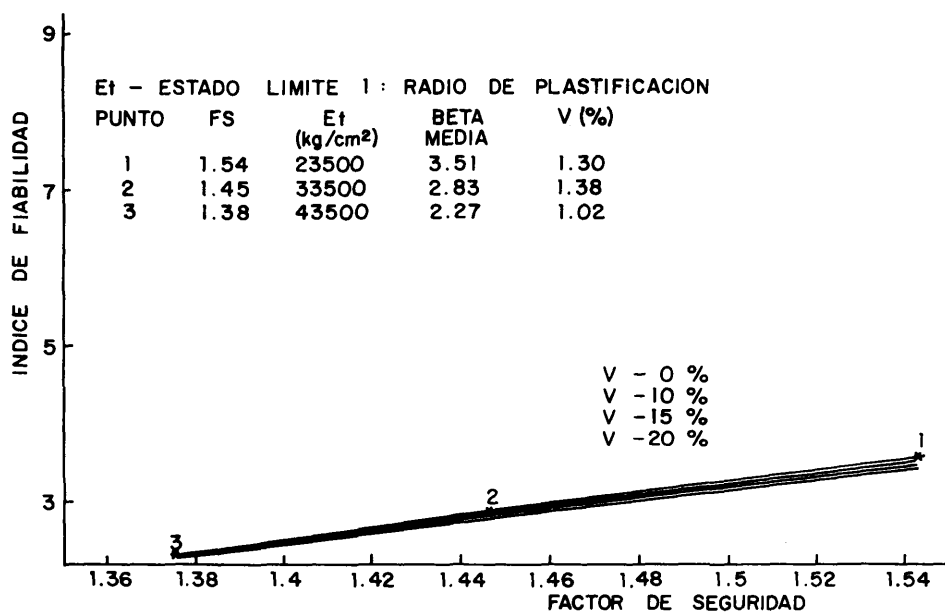
Factor de Seguridad:  $FS = \frac{\epsilon_{mx}}{\epsilon_s}$

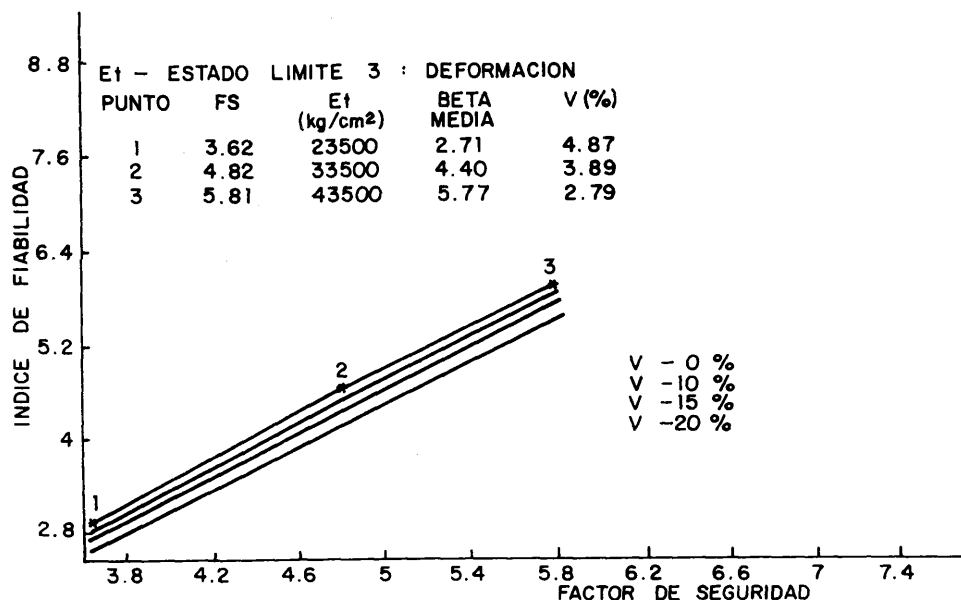
Función de Fallo:  $FF = \epsilon_{mx} - \epsilon_s$

En las páginas siguientes y para cada una de las siete variables anteriormente mencionadas, se presentan los resultados obtenidos, así como una serie de observaciones realizadas mediante el estudio de las mismas.

#### MODULO DE ELASTICIDAD DEL TERRENO (Et)

| MODULO DE ELASTICIDAD DEL TERRENO (kg/cm <sup>2</sup> )<br>23.500 |        |                                |         |                            |        |
|---|--------|--------------------------------|---------|----------------------------|--------|
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.5434                            |        | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 6.5898  |         | DEFORMACION<br>FS = 3.6244 |        |
| V %   | BETA   | V %                            | BETA    | V %                        | BETA   |
| 0   | 3.5688 | 0                              | 6.5339  | 0                          | 2.8745 |
| 10  | 3.5343 | 10                             | 6.3208  | 10                         | 2.7709 |
| 15  | 3.4969 | 15                             | 6.0911  | 15                         | 2.6606 |
| 20  | 3.4455 | 20                             | 5.7971  | 20                         | 2.5197 |
| MODULO DE ELASTICIDAD DEL TERRENO (kg/cm <sup>2</sup> )<br>33.500 |        |                                |         |                            |        |
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.4476                            |        | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 8.7603  |         | DEFORMACION<br>FS = 4.8181 |        |
| V %   | BETA   | V %                            | BETA    | V %                        | BETA   |
| 0   | 2.8787 | 0                              | 9.7668  | 0                          | 4.6110 |
| 10  | 2.8509 | 10                             | 9.5144  | 10                         | 4.4851 |
| 15  | 2.8167 | 15                             | 9.2116  | 15                         | 4.3335 |
| 20  | 2.7742 | 20                             | 8.8534  | 20                         | 4.1539 |
| MODULO DE ELASTICIDAD DEL TERRENO (kg/cm <sup>2</sup> )<br>43.500 |        |                                |         |                            |        |
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.3756                            |        | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 10.5639 |         | DEFORMACION<br>FS = 5.8101 |        |
| V %   | BETA   | V %                            | BETA    | V %                        | BETA   |
| 0   | 2.2964 | 0                              | 12.1972 | 0                          | 5.9572 |
| 10  | 2.2812 | 10                             | 11.9967 | 10                         | 5.8546 |
| 15  | 2.2624 | 15                             | 11.7544 | 15                         | 5.7305 |
| 20  | 2.2343 | 20                             | 11.3516 | 20                         | 5.5247 |





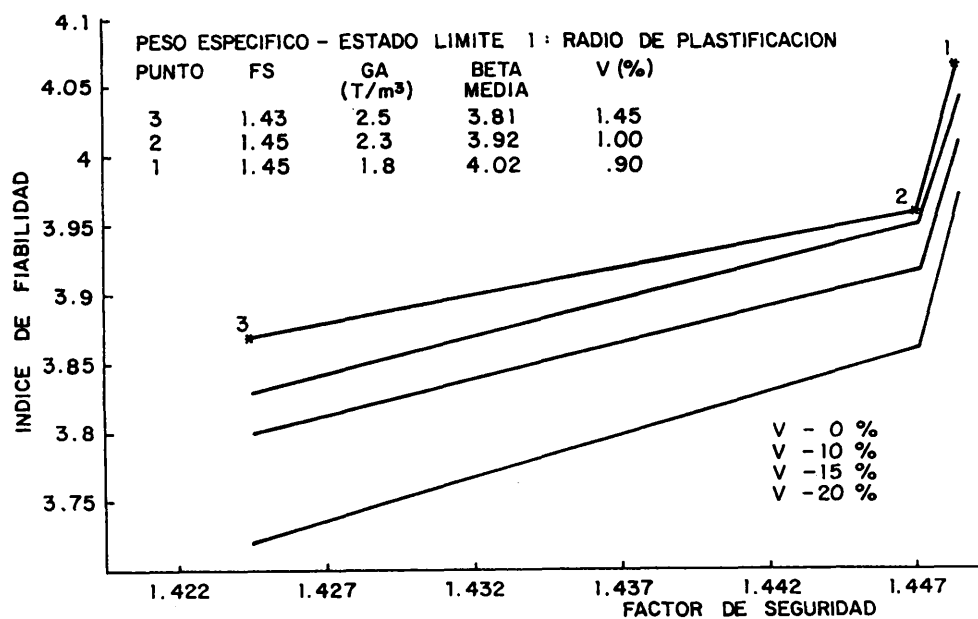
## OBSERVACIONES

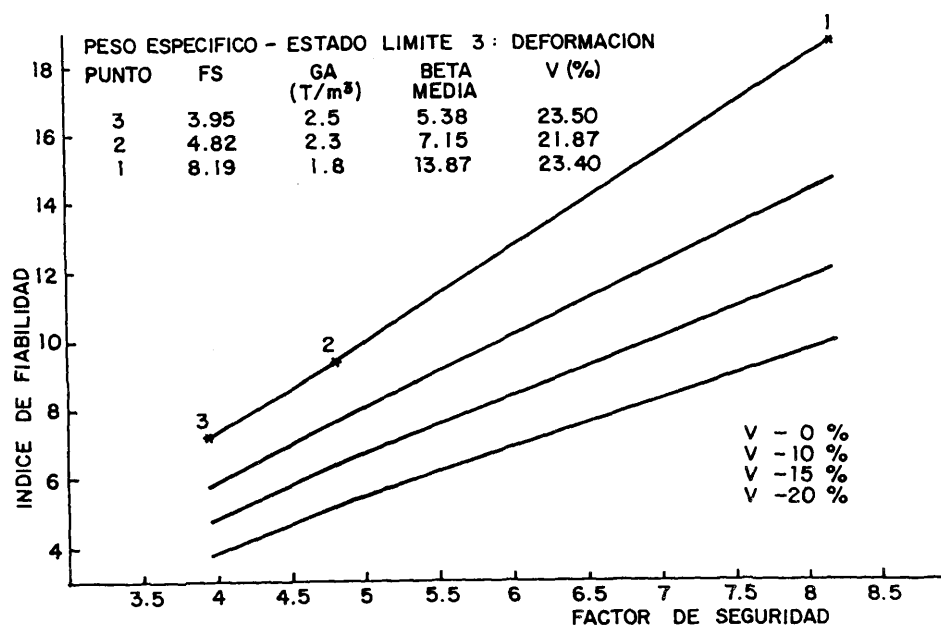
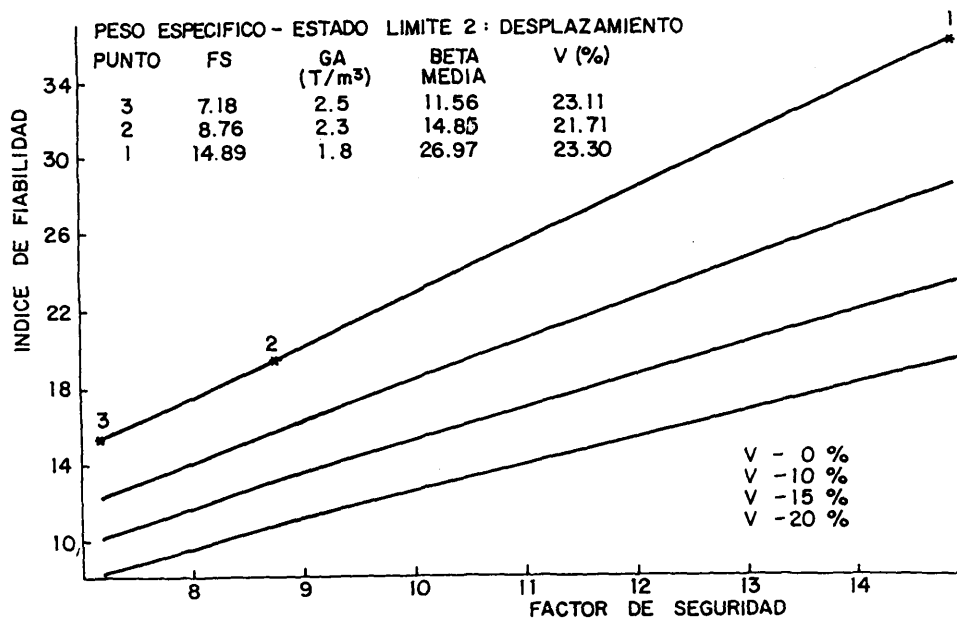
- Para el Estado Límite I cuanto mayor es el Módulo de Elasticidad menor es el Indice de Fiabilidad y menor el coeficiente de seguridad. Por lo que el Modulo de Elasticidad del terreno se comporta como una VARIABLE DE CARGA.
- En los Estados Límites II y III el Módulo de Elasticidad se comporta como una VARIABLE DE RESISTENCIA.
- Cuanto más alto es el valor medio de Et menor es la importancia de la incertidumbre en el conocimiento de la variable (el coeficiente de variación disminuye al aumentar el valor medio del módulo de Elasticidad del terreno).
- El bajo valor del coeficiente de variación de (1- 5%), indica que sea cual fuese el valor medio de Et la incertidumbre en el conocimiento de la variable no es significativa.
- El Estado Límite más desfavorable corresponde al de agotamiento de la capacidad resistente del terreno (EL I) y el más favorable el de Servicio (EL II), tanto desde el punto de vista del Factor de Seguridad como del Indice de Fiabilidad, a excepción del caso correspondiente al módulo de Elasticidad mas bajo.

Para este caso, el estado límite más desfavorable corresponde, utilizando la teoría de la Fiabilidad, al agotamiento de la estructura del sostenimiento; mientras que si se utiliza el concepto clásico de seguridad, el Proyecto habría de realizarse para el Estado Límite Ultimo de agotamiento de la capacidad resistente del terreno lo que implicaría, dando por buenos los resultados del programa utilizado, que se estaría proyectando del lado de la inseguridad.

## PESO ESPECIFICO DEL TERRENO (GA)

| PESO ESPECIFICO (T/m <sup>3</sup> )<br>1.8 |        |                              |        |                           |        |
|--|--------|------------------------------|--------|---------------------------|--------|
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.4490     |        | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 14.89 |        | DEFORMACION<br>FS = 8.19  |        |
| V %  | BETA   | V %                          | BETA   | V %                       | BETA   |
| 0  | 4.070  | 0                            | 36.300 | 0                         | 18.700 |
| 10   | 4.044  | 10                           | 28.600 | 10                        | 14.700 |
| 15   | 4.012  | 15                           | 23.500 | 15                        | 12.089 |
| 20   | 3.973  | 20                           | 19.475 | 20                        | 10.000 |
| PESO ESPECIFICO (T/m <sup>3</sup> )<br>2.3 |        |                              |        |                           |        |
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.4476     |        | DESPLAZAMIENTO<br>F = 8.76   |        | DEFORMACION<br>FS = 4.818 |        |
| V %  | BETA   | V %                          | BETA   | V %                       | BETA   |
| 0  | 3.9600 | 0                            | 19.500 | 0                         | 9.400  |
| 10   | 3.9504 | 10                           | 15.870 | 10                        | 7.660  |
| 15   | 3.9170 | 15                           | 13.212 | 15                        | 6.362  |
| 20   | 3.8600 | 20                           | 10.820 | 20                        | 5.190  |
| PESO ESPECIFICO (T/m <sup>3</sup> )<br>2.5 |        |                              |        |                           |        |
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.4248     |        | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 7.18  |        | DEFORMACION<br>FS = 3.95  |        |
| V %  | BETA   | V %                          | BETA   | V %                       | BETA   |
| 0  | 3.87   | 0                            | 15.45  | 0                         | 7.220  |
| 10   | 3.83   | 10                           | 12.33  | 10                        | 5.746  |
| 15   | 3.80   | 15                           | 10.20  | 15                        | 4.740  |
| 20   | 3.72   | 20                           | 8.25   | 20                        | 3.810  |



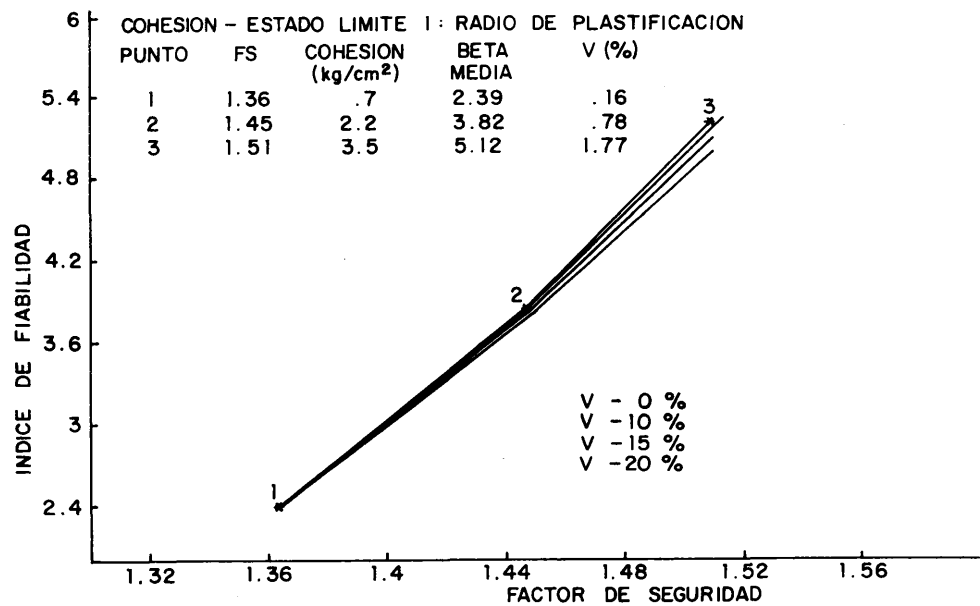


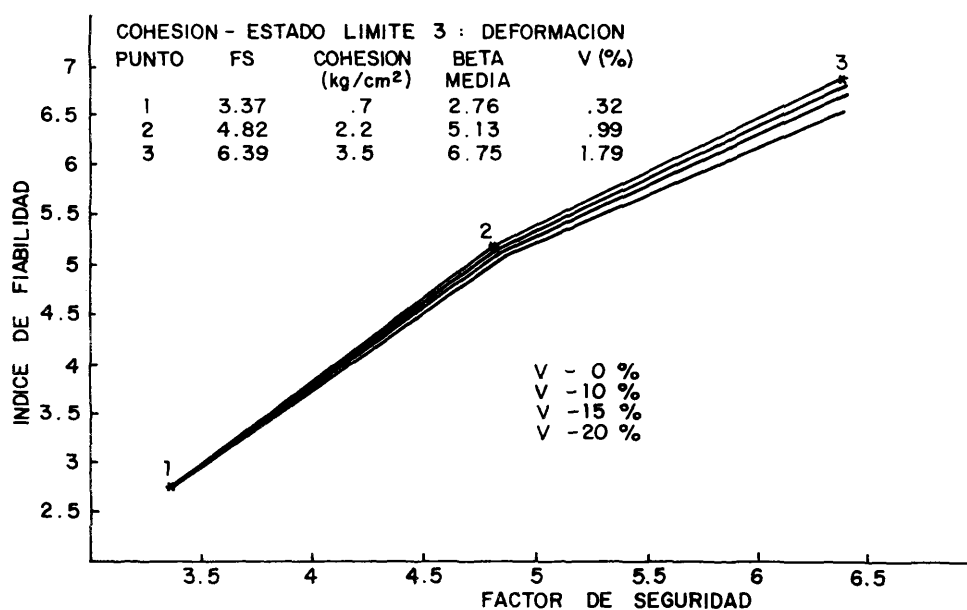
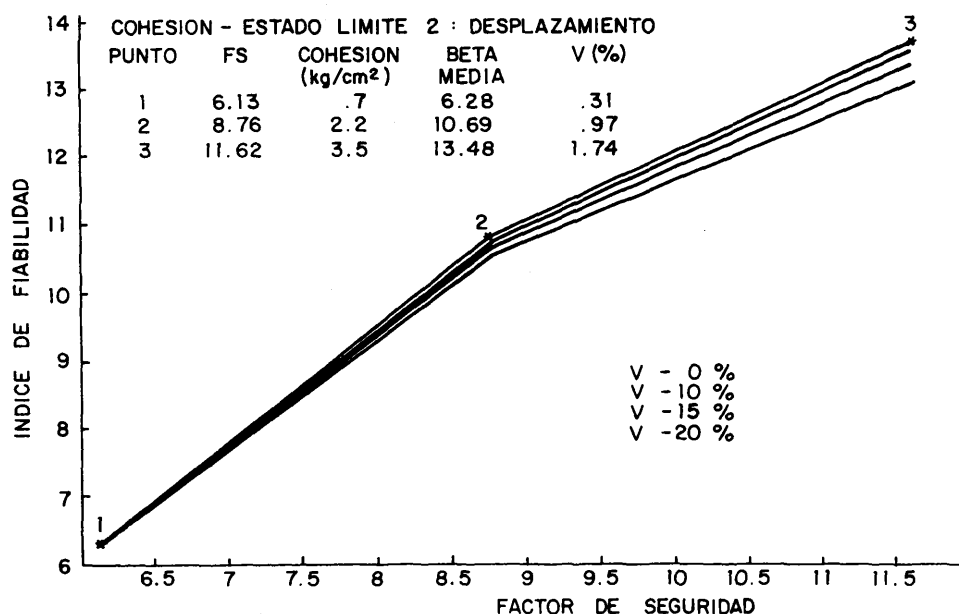
## OBSERVACIONES

- Para los tres Estados Límites; un aumento del Peso Específico implica en todos los casos considerados una disminución del coeficiente de seguridad y del Índice de Fiabilidad, es decir, el PESO ESPECIFICO DEL TERRENO se comporta como una VARIABLE DE CARGA.
- El coeficiente de Variación del Índice de Fiabilidad se mantiene prácticamente constante al variar el valor medio del Peso Específico.
- La incertidumbre en el conocimiento de la variable influye mucho (coeficiente de variación de 23 %) en el Estado Límite de Servicio y el último de agotamiento de la estructura del sostenimiento.
- El Estado Límite más desfavorable es siempre el último de agotamiento de la capacidad resistente del terreno; siendo el más favorable en todos los casos, el de servicio.

COHESION DEL TERRENO (COHE)

| COHESION 0.7 (kg/cm²)                  |        |                                |         |                            |        |
|--|--------|--------------------------------|---------|----------------------------|--------|
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.3641 |        | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 6.13    |         | DEFORMACION<br>FS = 3.3715 |        |
| V %                                    | BETA   | V %                            | BETA    | V %                        | BETA   |
| 0                                      | 2.2341 | 0                              | 6.3044  | 0                          | 2.7697 |
| 10                                     | 2.3919 | 10                             | 6.2938  | 10                         | 2.7648 |
| 15                                     | 2.3892 | 15                             | 6.2799  | 15                         | 2.7584 |
| 20                                     | 2.3841 | 20                             | 6.2531  | 20                         | 2.7458 |
| COHESIONES 2.2 (KG/CM²)                |        |                                |         |                            |        |
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.4476 |        | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 8.7603  |         | DEFORMACION<br>FS = 4.8182 |        |
| V %                                    | BETA   | V %                            | BETA    | V %                        | BETA   |
| 0                                      | 3.8600 | 0                              | 10.8222 | 0                          | 5.1916 |
| 10                                     | 3.8400 | 10                             | 10.7495 | 10                         | 5.1557 |
| 15                                     | 3.8152 | 15                             | 10.6582 | 15                         | 5.1107 |
| 20                                     | 3.7800 | 20                             | 10.5462 | 20                         | 5.0553 |
| COHESION 3.5 (kg/cm²)                  |        |                                |         |                            |        |
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.5101 |        | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 11.6245 |         | DEFORMACION<br>FS = 6.3935 |        |
| V %                                    | BETA   | V %                            | BETA    | V %                        | BETA   |
| 0                                      | 5.2392 | 0                              | 13.7609 | 0                          | 6.8893 |
| 10                                     | 5.1766 | 10                             | 13.6108 | 10                         | 6.8124 |
| 15                                     | 5.0981 | 15                             | 13.4140 | 15                         | 6.7115 |
| 20                                     | 4.9896 | 20                             | 13.1330 | 20                         | 6.5674 |





## OBSERVACIONES

- Para los tres Estados Límites, la cohesión se comporta como una VARIABLE DE RESISTENCIA ya que al aumentar su valor medio aumentan el Índice de fiabilidad y el Factor de Seguridad.
- Sea cual fuese el valor medio de la cohesión la incertidumbre en el conocimiento de la misma es insignificante.
- El Estado Límite más desfavorable corresponde al de agotamiento de la capacidad resistente del terreno; seguido del de agotamiento de la estructura del sostenimiento.

## ANGULO DE ROZAMIENTO DEL TERRENO (FI)

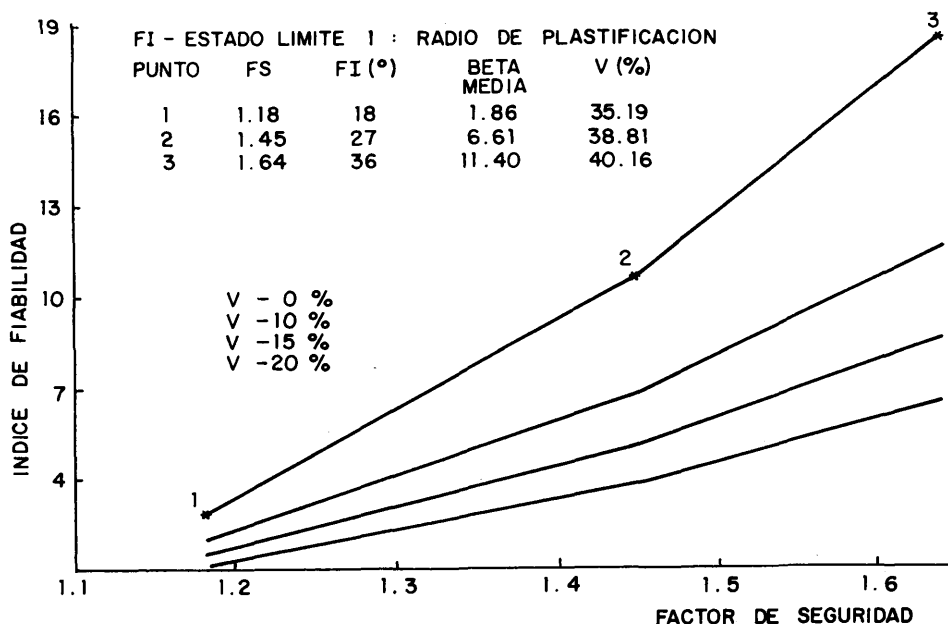
| ANGULO DE ROZAMIENTO<br>18°            |        |                               |        |                            |        |
|--|--------|-------------------------------|--------|----------------------------|--------|
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.1819 |        | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 5.5926 |        | DEFORMACION<br>FS = 3.0759 |        |
| V %                                    | BETA   | V %                           | BETA   | V %                        | BETA   |
| 0                                      | 2.8646 | 0                             | 6.5977 | 0                          | 2.8494 |
| 10                                     | 1.9847 | 10                            | 6.1778 | 10                         | 2.6565 |
| 15                                     | 1.4882 | 15                            | 5.6947 | 15                         | 2.4322 |
| 20                                     | 1.1145 | 20                            | 5.1481 | 20                         | 2.1789 |

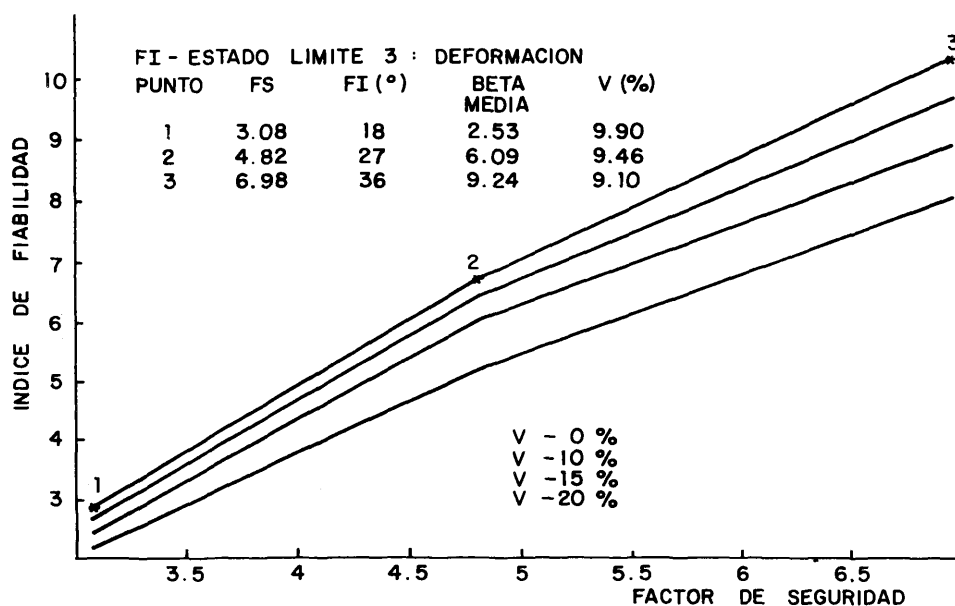
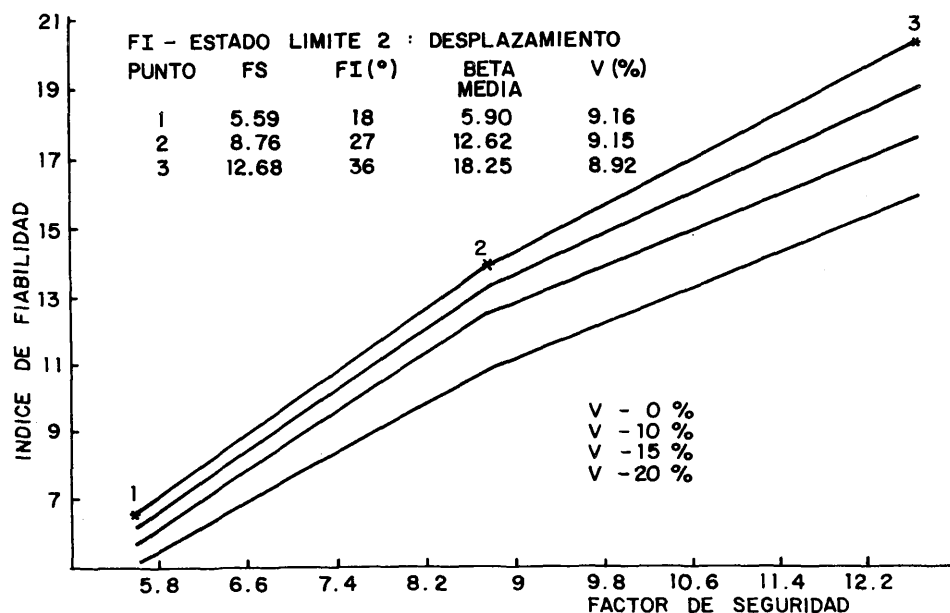
| ANGULO DE ROZAMIENTO<br>27°            |         |                               |         |                            |        |
|--|---------|-------------------------------|---------|----------------------------|--------|
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.4476 |         | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 8.7603 |         | DEFORMACION<br>FS = 4.8182 |        |
| V %                                    | BETA    | V %                           | BETA    | V %                        | BETA   |
| 0                                      | 10.6633 | 0                             | 13.9116 | 0                          | 6.732  |
| 10                                     | 6.8371  | 10                            | 13.2633 | 10                         | 6.4102 |
| 15                                     | 5.0917  | 15                            | 12.4888 | 15                         | 6.0246 |
| 20                                     | 3.8600  | 20                            | 10.8220 | 20                         | 5.1916 |

| ANGULO DE ROZAMIENTO<br>36°            |         |                                |         |                            |         |
|--|---------|--------------------------------|---------|----------------------------|---------|
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.6406 |         | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 12.6847 |         | DEFORMACION<br>FS = 6.9766 |         |
| V %                                    | BETA    | V %                            | BETA    | V %                        | BETA    |
| 0                                      | 18.7057 | 0                              | 20.3416 | 0                          | 10.3236 |
| 10                                     | 11.6490 | 10                             | 19.0538 | 10                         | 9.6594  |
| 15                                     | 8.6257  | 15                             | 17.6156 | 15                         | 8.9170  |
| 20                                     | 6.6289  | 20                             | 15.9733 | 20                         | 8.0685  |







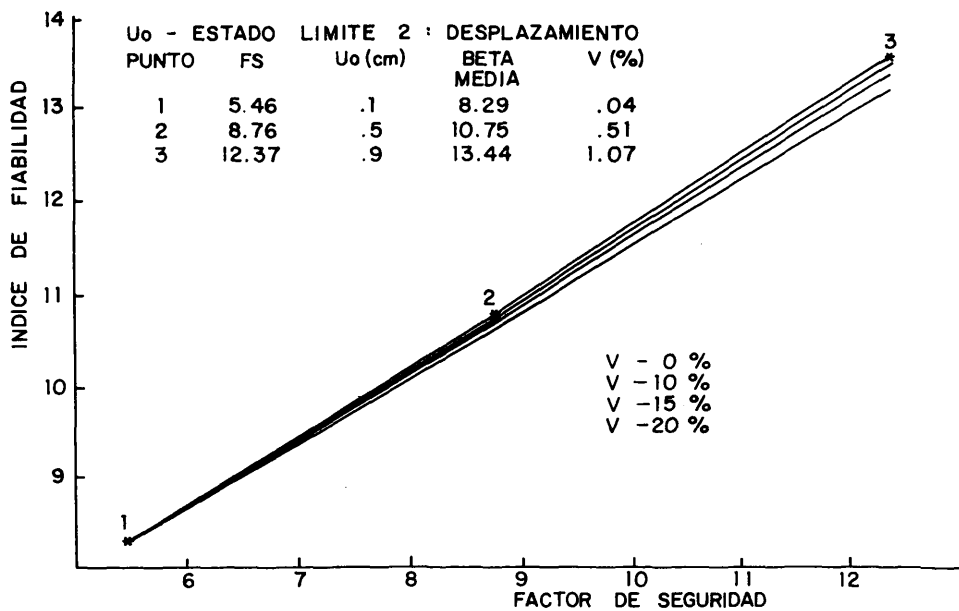
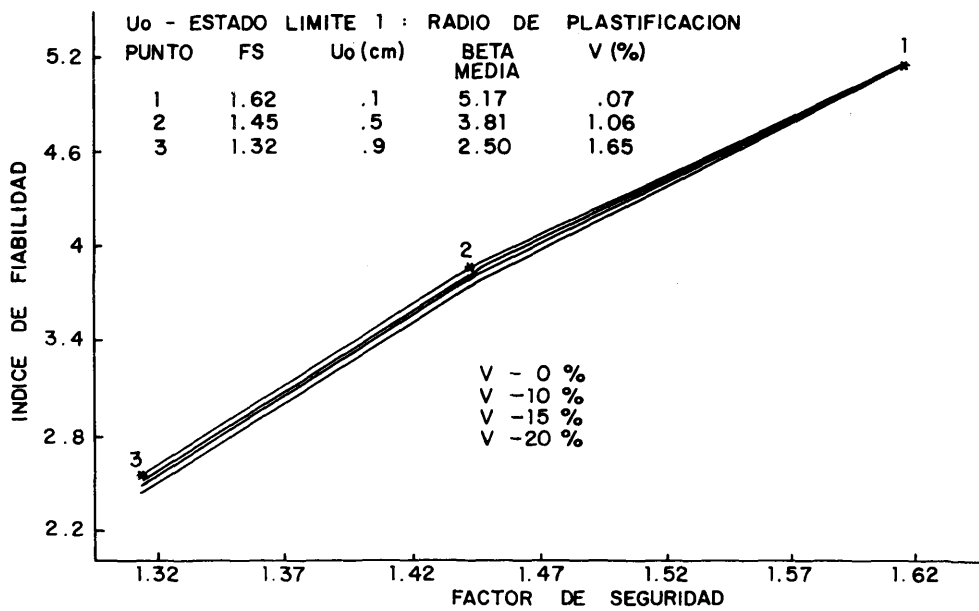
## OBSERVACIONES

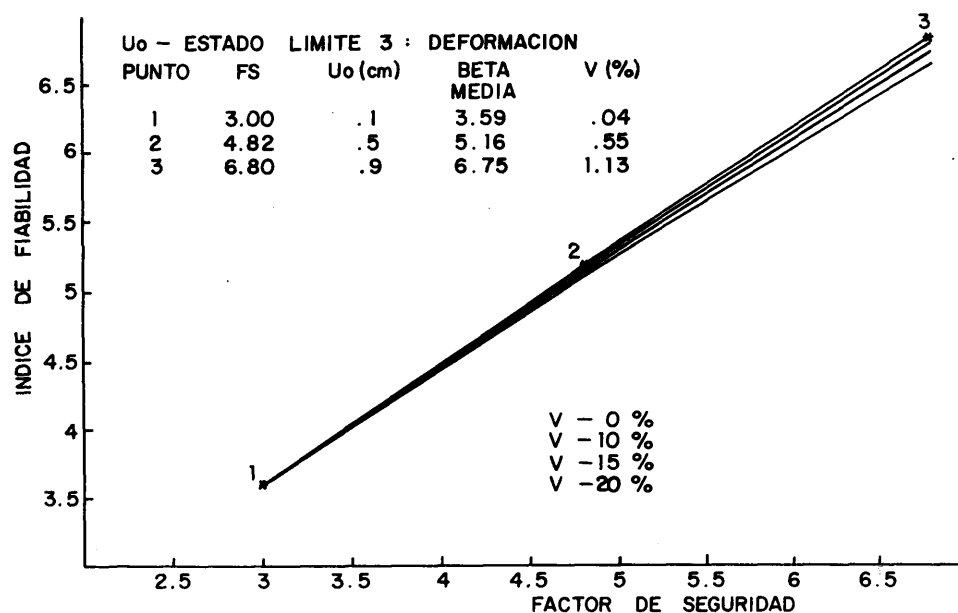
- Al igual que ocurría con la cohesión el ANGULO DE ROZAMIENTO del terreno se comporta siempre como una VARIABLE DE CARGA.
- La incertidumbre en el conocimiento del valor de la variable influye mucho en el Estado Límite último de la capacidad resistente del terreno.
- En lo que a los Estados límites más desfavorables se refiere puede observarse que para el ángulo de rozamiento menor existe concordancia entre la información proporcionada por el Coeficiente de Seguridad y el Indice de fiabilidad, no siendo así para los otros dos valores del mismo.

| $\varphi$ | E.L. MAS DESFAVORABLES |                       |
|-----------|------------------------|-----------------------|
|           | FS                     | $\beta$               |
| 18°       | $\rho/R, \epsilon, U$  | $\rho/R, \epsilon, U$ |
| 27°       |                        | $\epsilon, U, \rho/R$ |
| 36°       |                        |                       |

### CONVERGENCIA INICIAL (U<sub>0</sub>)

| CONVERGENCIA INICIAL (cm)<br>.1        |        |                               |         |                            |        |
|--|--------|-------------------------------|---------|----------------------------|--------|
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.6207 |        | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 5.4628 |         | DEFORMACION<br>FS = 3.0045 |        |
| V %                                    | BETA   | V %                           | BETA    | V %                        | BETA   |
| 0                                      | 5.1748 | 0                             | 8.2947  | 0                          | 3.5943 |
| 10                                     | 5.1723 | 10                            | 8.2924  | 10                         | 3.5932 |
| 15                                     | 5.1694 | 15                            | 8.2898  | 15                         | 3.5919 |
| 20                                     | 5.1654 | 20                            | 8.2858  | 20                         | 3.5900 |
| CONVERGENCIA INICIAL (cm)<br>.5        |        |                               |         |                            |        |
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.4476 |        | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 8.7603 |         | DEFORMACION<br>FS = 4.8182 |        |
| V %                                    | BETA   | V %                           | BETA    | V %                        | BETA   |
| 0                                      | 3.8600 | 0                             | 10.820  | 0                          | 5.190  |
| 10                                     | 3.8300 | 10                            | 10.780  | 10                         | 5.170  |
| 15                                     | 3.7980 | 15                            | 10.737  | 15                         | 5.147  |
| 20                                     | 3.7510 | 20                            | 10.672  | 20                         | 5.114  |
| CONVERGENCIA INICIAL (cm)<br>.9        |        |                               |         |                            |        |
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.3188 |        | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 12.368 |         | DEFORMACION<br>FS = 6.802  |        |
| V %                                    | BETA   | V %                           | BETA    | V %                        | BETA   |
| 0                                      | 2.5546 | 0                             | 13.6136 | 0                          | 6.8413 |
| 10                                     | 2.5258 | 10                            | 13.5270 | 10                         | 6.7954 |
| 15                                     | 2.4904 | 15                            | 13.4040 | 15                         | 6.7302 |
| 20                                     | 2.4437 | 20                            | 13.2313 | 20                         | 6.6390 |



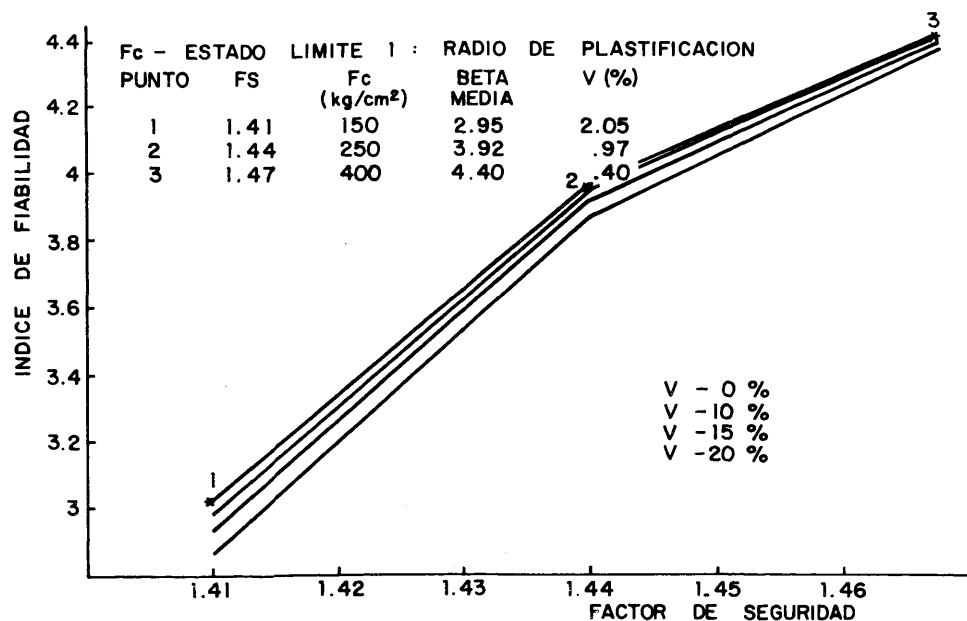


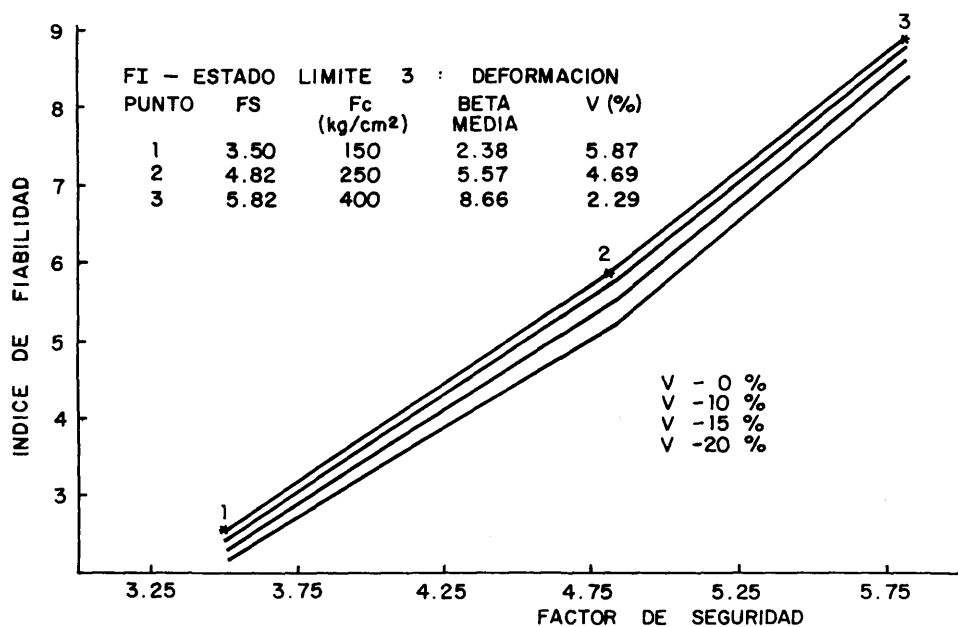
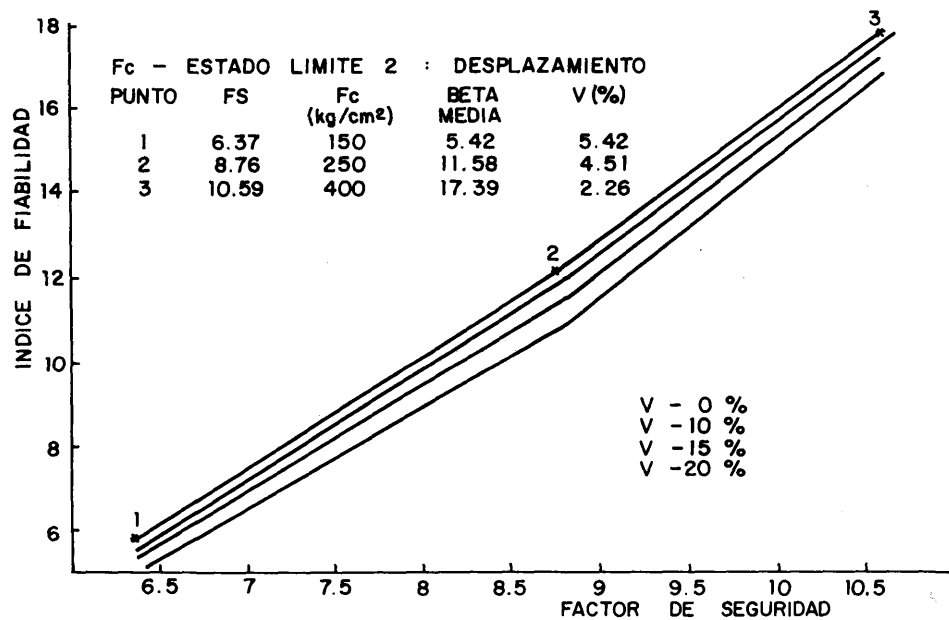
## OBSERVACIONES

- Al igual que ocurría con el Módulo de Elasticidad del terreno la CONVERGENCIA INICIAL se comporta.
- Para el Estado límite I como una VARIABLE DE CARGA, lo que podría interpretarse en el sentido que cuanto más tarde (  $>U_0$  ) en hacerse efectivo el sostenimiento mayor será la zona de terreno plastificado.
- Respecto a los Estados Límites II y III se comporta como VARIABLE DE RESISTENCIA.
- La incertidumbre en el conocimiento de la variable no es significativa para ninguno de los tres Estados límites.
- En cuanto a los Estados Límites más desfavorables no existen discrepancias entre los marcados por el FS y por, para los valores más altos de las convergencias; sin embargo, para el valor más bajo el orden no se corresponde.

## RESISTENCIA CARACTERISTICA DEL HORMIGON (Fc)

| RESISTENCIA CARACTERISTICA DEL HORMIGON (kg/cm <sup>2</sup> )<br>150 |       |                               |        |                          |       |
|--|-------|-------------------------------|--------|--------------------------|-------|
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.41                                 |       | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 6.367  |        | DEFORMACION<br>FS = 3.5  |       |
| V %  | BETA  | V %                           | BETA   | V %                      | BETA  |
| 0  | 3.025 | 0                             | 5.79   | 0                        | 2.555 |
| 10   | 2.985 | 10                            | 5.57   | 10                       | 2.450 |
| 15   | 2.935 | 15                            | 5.32   | 15                       | 2.330 |
| 20   | 2.863 | 20                            | 5.00   | 20                       | 2.180 |
| RESISTENCIA CARACTERISTICA DEL HORMIGON (kg/cm <sup>2</sup> )<br>250 |       |                               |        |                          |       |
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.44                                 |       | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 8.76   |        | DEFORMACION<br>FS = 4.82 |       |
| V %  | BETA  | V %                           | BETA   | V %                      | BETA  |
| 0  | 3.960 | 0                             | 12.200 | 0                        | 5.880 |
| 10   | 3.942 | 10                            | 11.887 | 10                       | 5.730 |
| 15   | 3.910 | 15                            | 11.400 | 15                       | 5.487 |
| 20   | 3.860 | 20                            | 10.820 | 20                       | 5.190 |
| RESISTENCIA CARACTERISTICA DEL HORMIGON (kg/cm <sup>2</sup> )<br>400 |       |                               |        |                          |       |
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.4677                               |       | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 10.587 |        | DEFORMACION<br>FS = 5.82 |       |
| V %  | BETA  | V %                           | BETA   | V %                      | BETA  |
| 0  | 4.420 | 0                             | 17.870 | 0                        | 8.90  |
| 10   | 4.410 | 10                            | 17.610 | 10                       | 8.77  |
| 15   | 4.394 | 15                            | 17.274 | 15                       | 8.60  |
| 20   | 4.374 | 20                            | 16.820 | 20                       | 8.37  |



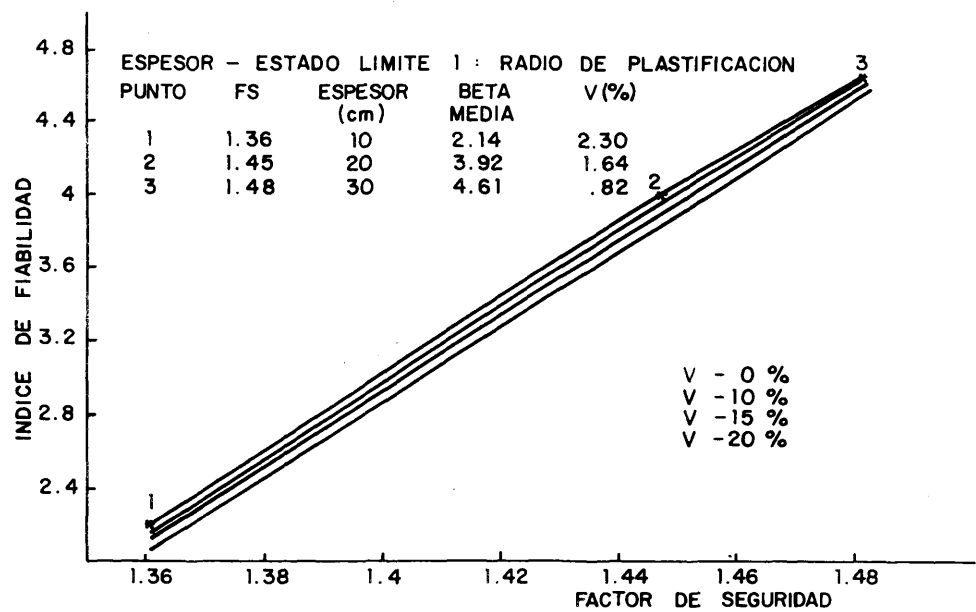


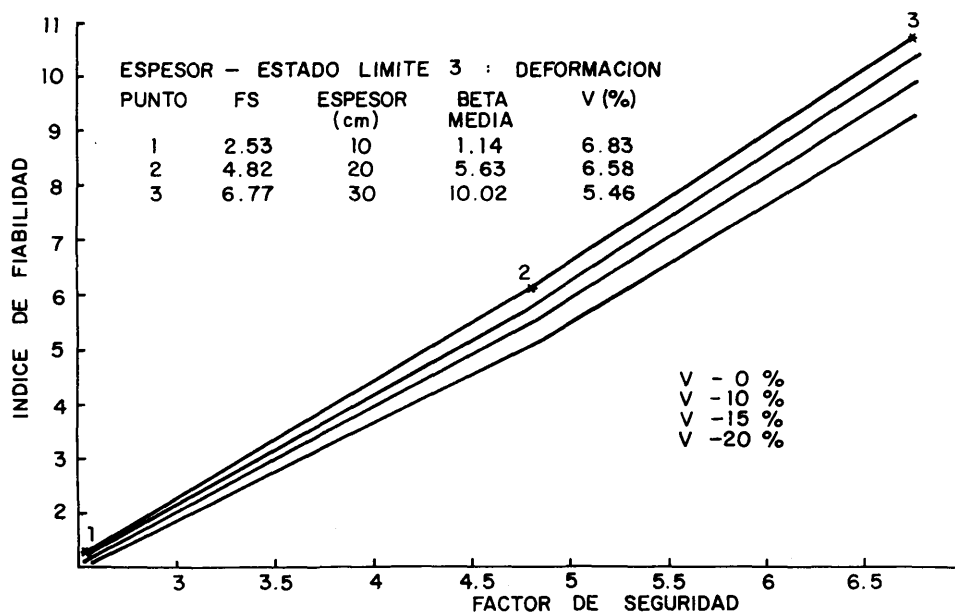
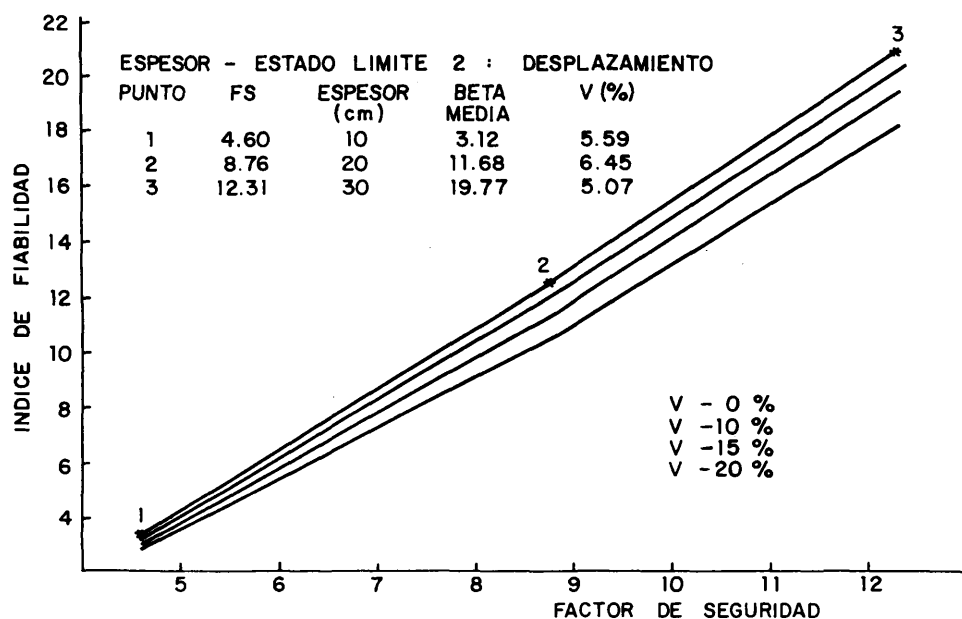
## OBSERVACIONES

- La resistencia característica del hormigón se comporta para los tres Estados Límites como una VARIABLE DE RESISTENCIA.
- En lo que se refiere a los Estados Límites más desfavorables cabe hacer idénticos comentarios a los realizados para la convergencia inicial.

**ESPESOR DEL SOSTENIMIENTO (T)**

| ESPESOR DEL SOSTENIMIENTO (cm)         |        |                               |       |                           |       |
|--|--------|-------------------------------|-------|---------------------------|-------|
| 10                                     |        |                               |       |                           |       |
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.361  |        | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 4.5986 |       | DEFORMACION<br>FS = 2.529 |       |
| V %                                    | BETA   | V %                           | BETA  | V %                       | BETA  |
| 0                                      | 2.2030 | 0                             | 3.342 | 0                         | 1.239 |
| 10                                     | 2.1696 | 10                            | 3.216 | 10                        | 1.184 |
| 15                                     | 2.1280 | 15                            | 3.065 | 15                        | 1.117 |
| 20                                     | 2.0710 | 20                            | 2.874 | 20                        | 1.030 |
| ESPESOR DEL SOSTENIMIENTO (cm)         |        |                               |       |                           |       |
| 20                                     |        |                               |       |                           |       |
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.4476 |        | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 8.7603 |       | DEFORMACION<br>FS = 4.818 |       |
| V %                                    | BETA   | V %                           | BETA  | V %                       | BETA  |
| 0                                      | 4.00   | 0                             | 12.6  | 0                         | 6.1   |
| 10                                     | 3.96   | 10                            | 12.1  | 10                        | 5.8   |
| 15                                     | 3.90   | 15                            | 11.4  | 15                        | 5.5   |
| 20                                     | 3.83   | 20                            | 10.6  | 20                        | 5.1   |
| ESPESOR DEL SOSTENIMIENTO (cm)         |        |                               |       |                           |       |
| 30                                     |        |                               |       |                           |       |
| RADIO DE PLASTIFICACION<br>FS = 1.482  |        | DESPLAZAMIENTO<br>FS = 12.31  |       | DEFORMACION<br>FS = 6.77  |       |
| V %                                    | BETA   | V %                           | BETA  | V %                       | BETA  |
| 0                                      | 4.65   | 0                             | 21.0  | 0                         | 10.70 |
| 10                                     | 4.63   | 10                            | 20.3  | 10                        | 10.30 |
| 15                                     | 4.60   | 15                            | 19.5  | 15                        | 9.84  |
| 20                                     | 4.55   | 20                            | 18.3  | 20                        | 9.23  |





## OBSERVACIONES

— Análogas a las realizadas para el caso de la Resistencia característica del Hormigón.



TABLA 4.5

| VARIABLES | Comportamiento de las Variables en los Estados Límites |    |     | MATICES<br>$\beta$ — FS | Coef. Variac. (%)<br>$\beta$ |     |     |
|-----------|--|----|-----|-------------------------|------------------------------|-----|-----|
|           | I  | II | III |                         | I                            | II  | III |
| FI        | R  | R  | R   | SI                      | 40                           | 9   | 10  |
| GA        | C  | C  | C   | NO                      | 1                            | 23  | 23  |
| T         | R  | R  | R   | SI                      | 1                            | 6   | 7   |
| Et        | C  | R  | R   | SI                      | 1.3                          | 4   | 4   |
| COHE      | R  | R  | R   | NO                      | 1.1                          | 1.1 | 1.1 |
| Uo        | C  | R  | R   | SI                      | 1                            | 1   | 1   |
| Fc        | R  | R  | R   | NO                      | 1.5                          | 5   | 5   |

R = VARIABLE DE RESISTENCIA.

C = VARIABLE DE CARGA.

I = E.L.U. DE AGOTAMIENTO DE LA CAPACIDAD DE RESISTENCIA DEL TERRENO.

II = E.L.S. DE CONVERGENCIA EXCESIVA DEL SOSTENIMIENTO.

III = E.L.U. DE AGOTAMIENTO.

En base a la información reflejada en la Tabla 4.5, que presenta un resumen de los resultados obtenidos, es posible, finalmente, hacer los siguientes comentarios :

- En contra de lo que en un principio, y de forma intuitiva, pudiese pensarse, el Módulo de Elasticidad del Terreno, Et, no siempre se comporta como una variable de Resistencia.
- No son necesarios estudios exhaustivos de las incertidumbres relativas a "todas" las variables implicadas en el sistema, sino solamente de aquellas cuya variabilidad influye de forma decisiva en la Probabilidad de Fallo (vg. Angulo de Rozamiento y Peso Específico del Terreno).
- Respecto a la Identificación del Estado Límite más desfavorable, es preciso indicar que no siempre existe concordancia entre los procedimientos clásicos y los que utilizan Métodos de Nivel II.

#### 4.6. REFERENCIAS

- (4.1) E. ALARCON: "Efectos Dinámicos Aleatorios en Túneles y Obras Subterráneas". Fundación Juan March. Serie Universitaria, 36. Madrid 1977.
- (4.2) P. FRITZ: "An Analytical Solution for Axisymmetric Tunnel Problems in Elasto-Viscoplastic Media". Int.Journal Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 8, pp 325 - 342. 1980.
- (4.3) M.A. HACAR: "Función del Revestimiento en el NATM". Comunicación privada. Mayo 1991

- (4.4) ITA (INTERNATIONAL TUNNELLING ASSOCIATION): "Guidelines for the Design of Tunnels". Tunnelling and Underground Space Technology. Ed. Pergamon Press. Vol. 3, Nº 3, pp. 237-249. 1988.
- (4.5) C. LOUIS: "Construction de Tunnels par la Nouvelle Methode Autrichienne". Journees D'estudes, Octobre 1971. Lyon.
- (4.6) "SOSTENIM: Sosteenimiento de Excavaciones Subterráneas. Programa para el Cálculo de Curvas Características". Instituto Geológico y Minero de España. Madrid. 1988.
- (4.7) L. VON RABCEWICZ: "The New Austrian Tunnelling Method" Water Power. November 1964. Part One. pp. 453-457.
- (4.8) L. VON RABCEWICZ: "The New Austrian Tunnelling Method" Water Power. December 1964. Part Two. pp. 511-515.
- (4.9) L. VON RABCEWICZ: "The New Austrian Tunnelling Method" Water Power. January 1965 Part Three. pp. 19-24.
- (4.10) L. VON RABCEWICZ: "Stability of Tunnels under Rock Load" Water Power. June 1969. Part One. pp. 225 - 229
- (4.11) L. VON RABCEWICZ : "Stability of Tunnels under Rock Load" Water Power. July 1969. Part Two. pp. 266 - 273.
- (4.12) L. VON RABCEWICZ : "Stability of Tunnels under Rock Load" Water Power. August 1969. Part Three, pp. 297 - 301.
- (4.13) L. VON RABCEWICZ : "Principles of Dimensioning the Supporting System for the New Austrian Tunnelling Method". Water Power. March 1973. pp. 88-93.
- (4.14) INSTITUTO TECNOLÓGICO GEOMINERO DE ESPAÑA, Y SINEX, S.A. "Establecimiento de Niveles de Seguridad en Túneles y Galerías". Madrid. 1989